Der

arithmetische Jugendfreund.

Erster Band.

Math. A. 72 ⅔

Hoffmann

(1)

Der

mathematische Jugendfreund

oder

populäre Darstellung der Grundlehren

der

reinen und angewandten Mathematik

für

Anfänger,

von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

Königlich-Baierischem Hofrathe, Director des Königl. Lyceums zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik am Königl. Lyceum, erstem Professor an dem Königl. Forst-Lehrinstitute, Mitgliede der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde, der Kaiserlich-Leopoldinisch-Carolinischen Academie der Naturforscher zu Bonn, der Senkenbergischen naturforschenden Gesellschaft zu Frankfurt am Main, der Gesellschaft zur Beförderung nützlicher Künste und deren Hülfswissenschaften daselbst, und der Herzoglich-Sachsen-Gothaischen und Meiningischen Societät der Forst- und Jagdkunde zu Dreisigacker.

Der arithmetischen Abtheilung erster Band.

Die

Elemente der Arithmetik.

Mainz, 1825.

Bei Florian Kupferberg.

Der

arithmetische Jugendfreund

oder

populäre Darstellung der Grundlehren

der

Arithmetik und Algebra

für

Anfänger,

von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

Königlich-Baierischem Hofrathe; Director des Königl. Lyceums zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik am Königl. Lyceum, erstem Professor an dem Königl. Forst-Lehrinstitute, Mitgliede der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde, der Kaiserlich-Leopoldinisch-Carolinischen Academie der Naturforscher zu Bonn, der Senkenbergischen naturforschenden Gesellschaft zu Frankfurt am Main, der Gesellschaft zur Beförderung nützlicher Künste und deren Hülfswissenschaften daselbst, und der Herzoglich-Sachsen-Gothaischen und Meiningischen Societät der Forst- und Jagdkunde zu Dreisigacker.

Erster Band.

Die

Elemente der Arithmetik.

Mainz, 1825.

Bei Florian Kupferberg.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Der

lehrbegierigen Jugend

des

deutschen Vaterlandes

gewidmet

vom

Verfasser.

Zueignungswort.

In der Reihe menschlicher Erkenntnisse behauptet die Mathematik eine ausgezeichnete Stelle. Klarheit der Begriffe, Gründlichkeit des Vortrags und eine höchst mannigfaltige Anwendung ihrer Lehren auf das Wohl des bürgerlichen Lebens sind Vorzüge, welche man zu allen Zeiten allgemein anerkannt hat.

Wer mit Ernst und Eifer dem sichern Wege ihrer Untersuchungen folgt, bildet sich zum gründlichen Denker und zum kenntnißreichen Bürger des Staates.

Wem könnte daher eine Schrift, welche ihre Grundlehren entwickelt, zweckmäßiger gewidmet werden, als der lehrbegierigen Jugend des deutschen Vaterlandes?

Möge sie freundlich von ihr aufgenommen und zu ihrer geistigen Veredlung eifrig benützt werden!

Vorwort.

Es ist bekannt, daß die mathematische Literatur an wohlgelungnen Lehrbüchern keinen Mangel leidet. Demungeachtet scheint das Streben des mathematischen Jugendfreundes weder unnütz, noch ganz unverdienstlich zu seyn. Sein Zweck ist, die Grundlehren der reinen und angewandten Mathematik, zum Besten der ersten Anfänger, möglichst populär zu entwickeln, ohne dem Hauptcharacter dieser Wissenschaft: Klarheit der Begriffe und Gründlichkeit der Darstellung etwas zu vergeben.

Der mathematische Jugendfreund kennt keinen Lehrbegriff, welcher sich, nach diesem Plane, über das Gebiet der gesammten Mathesis erstreckt, und es liegt ihm ganz vorzüglich am Herzen, einer so geiststärkenden Lehre im Kreise der deutschen Jugend immer mehr Eingang zu verschaffen.

Daher überläßt er sich der angenehmen Hoffnung, es werden ihm hierin auch die öffentlichen und privat Lehrer der Mathesis freundlich entgegen kommen, um durch thätiges Mitwirken dem wichtigen Ziele: Förderung einer wahrhaft wissenschaftlichen Bildung, stets näher zu rücken.

Die Mannigfaltigkeit des Stoffs, welchen der mathematische Jugendfreund zu bearbeiten gedenket, geht aus folgender Uebersicht hervor.

Das ganze Werk wird aus fünf Abtheilungen und jede Abtheilung aus zwey Bänden bestehen, nämlich:

I. Die arithmetische Abtheilung enthält:
1. Die Arithmetik und 2. die Algebra;

II. Die geometrische Abtheilung enthält:
1. Die Geometrie und Trigonometrie und
2. die Stereometrie, nebst Anwendung der Algebra auf die Raumlehre;

III. Die höhere (arithmetische und geometrische) Abtheilung enthält:
1. Die höhere Geometrie und 2. die Elemente der Differential- und Integralrechnung;

IV. Die mechanische Abtheilung enthält:
1. Die Statik und Mechanik und 2. die Hydrostatik, Hydraulik und Aerometrie;

V. Die optische und astronomische Abtheilung enthält:
1. Die optischen Wissenschaften und 2. die Elemente der Astronomie.

Aschaffenburg, im October 1824.

Der Verfasser.

Uebersicht
des
ersten Bandes.

Erster Lehrgang.

Vorbereitende Einleitung.

I. Lehrübung.

Seite

Begriff und Hauptttheile der Mathematik . . . 3

II. Lehrübung.

Kurze Uebersicht der mathematischen Methode . . 9

Zweyter Lehrgang.

Allgemeine Betrachtung der Zahlen und ihrer Veränderungen.

I. Lehrübung.

Begriff der Zahl und der Einheit. Veränderungen mit Zahlen 18

II. Lehrübung.

Vermehrungsarten der Zahlen 23

III. Lehrübung.

Verminderungsarten der Zahlen 27

Dritter Lehrgang.

Die Zifferrechnung in ihren vier Grundoperationen.

I. Lehrübung.

Grundsätze des zehntheiligen Zahlensystems . . . 31

Seite

II. Lehrübung.

Gründe und Ausführung der Addition 39

III. Lehrübung.

Gründe und Ausführung der Multiplication . . 44

IV. Lehrübung.

Gründe und Ausführung der Subtraction 49

V. Lehrübung.

Gründe und Ausführung der Division 54

Vierter Lehrgang.

Die vier Rechnungsarten in benannten Zahlen.

I. Lehrübung.

Entwickelung nöthiger Vorbegriffe 64

II. Lehrübung.

Addition und Multiplication in benannten Zahlen 68

III. Lehrübung.

Subtraction und Division in benannten Zahlen . 73

Fünfter Lehrgang.

Die vier Grundrechnungen in Decimalbrüchen.

I. Lehrübung.

Vorbegriffe und Vordersätze 80

II. Lehrübung.

Addition und Subtraction in Decimalbrüchen . . 84

III. Lehrübung.

Multiplication in Decimalbrüchen 89

Seite

IV. Lehrübung.

Division in Decimalbrüchen 97

Sechster Lehrgang.

Entstehung und Rechnungsarten der gemeinen Brüche.

I. Lehrübung.

Grundbegriffe und Vordersätze 110

II. Lehrübung.

Die Addition in gemeinen Brüchen 125

III. Lehrübung.

Die Subtraction in gemeinen Brüchen 130

IV. Lehrübung.

Die Multiplication in gemeinen Brüchen . . . 135

V. Lehrübung.

Die Division in gemeinen Brüchen 140

Siebenter Lehrgang.

Die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen.

I. Lehrübung.

Grundlehren von den arithmetischen und geometrischen Verhältnissen 145

II. Lehrübung.

Grundlehren von den arithmetischen Proportionen . 149

III. Lehrübung.

Grundlehren von den geometrischen Proportionen . 158

Seite

Achter Lehrgang.
Practische Anwendung der Proportionslehre.

I. Lehrübung.
Die einfache Regel Detri 168

II. Lehrübung.
Die zusammengesetzte Regel Detri 172

III. Lehrübung.
Die Gesellschaftsrechnung 177

IV. Lehrübung.
Die Vermischungsrechnung 181

V. Lehrübung.
Die Kettenregel 187

Neunter Lehrgang.
Die Rechnung mit entgegengesetzten Zahlen.

I. Lehrübung.
Entwickelung nöthiger Vorbegriffe 190

II. Lehrübung.
Die Addition und Subtraction in entgegengesetzten Zahlen 194

III. Lehrübung.
Die Multiplication und Division in entgegengesetzten Zahlen 198

Zehnter Lehrgang.
Erste Gründe der Buchstabenrechnung.

I. Lehrübung.
Entwickelung nöthiger Grundlehren 203

Seite

II. Lehrübung.

Die Addition und Subtraction in Buchstaben . . 206

III. Lehrübung.

Ausführung der Multiplication und Division in Buchstaben 209

Eilfter Lehrgang.

Die Lehre von der Ausziehung der Quadratwurzel.

I. Lehrübung.

Entwickelung nöthiger Vorbereitungssätze . . . 220

II. Lehrübung.

Die Ausziehung der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen 225

III. Lehrübung.

Ausziehung der Quadratwurzel durch Annäherung. 239

IV. Lehrübung.

Quadratwurzeln aus gemeinen und aus Decimalbrüchen 245

Zwölfter Lehrgang.

Die Ausziehung der Cubikwurzel.

I. Lehrübung.

Entwickelung nöthiger Grundlehren 250

II. Lehrübung.

Die Ausziehung der Cubikwurzel aus ganzen Zahlen. 255

III. Lehrübung.

Ausziehung der Cubikwurzel durch Annäherung . 270

Seite

IV. Lehrübung.

Cubikwurzeln aus gemeinen und zehntheiligen Brüchen 275

Dreyzehnter Lehrgang.

Grundlehren von den Progressionen.

I. Lehrübung.

Grundbegriffe und Vordersätze 281

II. Lehrübung.

Elementarlehren von der arithmetischen Progression. 284

III. Lehrübung.

Elementarlehren von der geometrischen Progression. 296

Vierzehnter Lehrgang.

Die Rechnung mit den Logarithmen.

I. Lehrübung.

Entstehung und Haupteigenschaften der Logarithmen. 312

II. Lehrübung.

Erklärung des Logarithmensystems und der Logarithmentafeln 322

III. Lehrübung.

Bestimmung der, den gegebenen Zahlen zugehörigen Logarithmen 333

IV. Lehrübung.

Bestimmung der, den gegebenen Logarithmen zugehörigen Zahlen 348

V. Lehrübung.

Einige Anwendungen der Logarithmen-Rechnung . 354

Der

arithmetische Jugendfreund,

oder

die Elemente der Arithmetik

für

Anfänger.

Die Elemente der Arithmetik.

Erster Lehrgang.

Vorbereitende Einleitung.

I. Lehrübung.

Begriff und Hauptttheile der Mathematik.

§. 1.

Begriff der Größe und der Mathematik.

I. Der gesammten Mathematik liegt der Begriff der Größe zum Grunde, welcher, seiner Einfachheit wegen, keiner eigentlichen Erklärung fähig ist. Zur Erläuterung kann man sagen: Größe ist alles dasjenige, was sich vermehren oder vermindern läßt. So ist z. B. die Zahl eine Größe, weil man sich eine größere oder kleinere Zahl, als die gegebene ist, vorstellen kann. Auf gleiche Weise ist jede gerade Linie eine Größe, weil man sich dieselbe sowohl verlängert, als verkürzt denken kann. Auf ähnliche Art sind Kräfte, Gewichte, u. s. w. als Größen zu betrachten.

II. Unter der Mathematik oder Größenlehre versteht man die wissenschaftliche Lehre von den Größen. Sie lehrt die verschiedenartigen Größen nicht

nur kennen, sondern zeigt auch, wie man dieselben mit einander vergleichen und messen soll. Auch gibt sie Regeln an, die Größen dergestalt mit einander zu verbinden, daß man im Stande ist, bestimmte Resultate zu erhalten.

§. 2.

Die reine und angewandte Mathematik.

I. Die Größe überhaupt, welche den Gegenstand der Mathematik bildet, kann auf doppelte Weise betrachtet werden; entweder blos an sich selbst, oder in ihrer wirklichen Anwendung auf Gegenstände der Natur oder der Kunst. Jener Haupttheil der Mathematik, welcher die Größen blos an sich selbst, d. h. ganz im allgemeinen betrachtet, heißt die reine Mathematik; jener Haupttheil aber, welcher die Größen auf wirkliche Gegenstände der Erfahrung anwendet, wird die angewandte Mathematik genennt.

II. Betrachtet man z. B. die Zahl zwölf als eine bloße Menge von zwölf gleichartigen Einheiten, ohne zu bestimmen, ob es zwölf Gulden, oder zwölf Pfunde, oder zwölf Fuße, u. dgl. sind, so gehört diese Betrachtung zur reinen Mathematik; denkt man sich aber unter dieser Zahl zwölf z. B. zwölf Lothe, so gehört diese Zahl zur angewandten Mathematik; weil man hier nicht mehr von einer Zahl im allgemeinen, sondern von einer solchen spricht, deren Eigenheiten uns durch die Erfahrung gegeben sind.

III. Auf ähnliche Weise läßt sich z. B. die gerade Linie blos als eine Ausdehnung in die Länge betrachten, und nun gehört dieses zur reinen Mathematik. Stellt

aber diese gerade Linie z. B. die Höhe eines vor uns stehenden Thurmes, oder die Tiefe eines Grabens, oder die Länge eines Weges, u. d. gl. dar, so gehört diese Betrachtung zum Gebiete der angewandten Mathematik.

Die Betrachtung des Vierecks überhaupt, d. h. einer ebenen Figur, welche von vier Linien eingeschlossen ist, gehört zur reinen; die Betrachtung eines viereckigen Grundstükes aber zur angewandten Mathematik.

§. 3.

Die Zahlenlehre und die Raumlehre.

1. Die Größen, welche man in der reinen Mathematik blos an sich betrachtet, sind entweder Zahlgrößen, oder Raumgrößen. Zahlgrößen werden jene genennt, deren Natur in einer Verbindung von mehreren gleichartigen Dingen besteht. So ist z. B. sechs eine Zahlgröße, weil sie eine Verbindung von sechs, unter sich gleichartigen Dingen ausdrückt, deren besondere Art aber hierdurch nicht angegeben ist. Hieraus folgt, daß die Natur dieser Zahlgrößen einzig aus der Menge ihrer einzelnen Bestandtheile hervorgeht. Man fragt bey ihnen nur: Wieviel? und bekümmert sich nicht um die Art und Weise, wie ihre Theile etwa neben einander stehen. Unter den Raumgrößen versteht man aber jene Ausdehnungen im Raume, woran wir entweder nur eine Ausdehnung (nach der Länge) oder zwey Ausdehnungen (nach Länge und Breite) oder drey Ausdehnungen (nach Länge, Breite und Tiefe) unterscheiden. Daher sind alle Raumgrößen entweder Linien, oder Flächen, oder Körper.

II. Die Zahlenlehre oder Arithmetik ist daher jener Theil der Mathematik, welcher sich mit den Zahlgrößen oder Zahlen beschäftigt. Die Raumlehre oder Geometrie hat aber die Betrachtung der Raumgrößen, d. h. der Linien, Flächen und Körper zum Gegenstande.

III. Hieraus folgt, daß es sowohl eine reine Zahlenlehre und reine Raumlehre, als auch eine angewandte Zahlenlehre und angewandte Raumlehre gibt, nachdem man die Zahlgrößen und die Raumgrößen entweder blos an sich, oder in ihrer Anwendung auf wirkliche Gegenstände der Erfahrung betrachtet. So gehören z. B. die kaufmännischen Rechnungen zur angewandten oder practischen Arithmetik, und das wirkliche Feldmessen macht einen Theil der angewandten Geometrie aus.

§. 4.

Hauptabtheilungen der angewandten Mathematik.

I. Die Lehren der reinen Mathematik können zwar auf unzählich vielerley Gegenstände der Erfahrung angewendet werden, woraus die Unermeßlichkeit des Gebietes der angewandten Mathematik hervorgeht. Indessen gibt es vorzüglich viererley Hauptgegenstände, worauf die reine Mathesis ihre Anwendung findet. Daher enthält die angewandte Mathematik vier große Unterabtheilungen, welche man die mechanischen, optischen, astronomischen und technischen Wissenschaften zu nennen pflegt.

II. Den Gegenstand der mechanischen Wissen-

schaften bilden die Kräfte, welche in der Natur oder Kunst wirksam und der Grund von allen Bewegungen sind, welche auf irgend eine Weise hervorgebracht werden. Da sich nämlich kein Körper blos durch sich selbst bewegen kann, so nennt man die Ursache jeder Bewegung eine Kraft, und spricht z. B. von der Kraft des fließenden Wassers zur Bewegung der Mühlen, von der Kraft des Gewichtes, oder der Federn zur Bewegung der Uhrwerke u. s. w. Aber die Kraft bringt nicht immer eine wirkliche Bewegung hervor, sondern hebt öfters eine vorhandene Bewegung auf, wie z. B. die Kraft des Ankers, wodurch das Schiff auf dem Strome zurück gehalten, oder die Kraft der Hand, wodurch der darauf liegende Stein gegen den Fall geschützt wird.

Diese verschiedenen Kräfte der Natur und Kunst nicht blos im allgemeinen, sondern nach ihrer bestimmten Wirkungsweise kennen zu lernen und sowohl auf die festen, als auf die liquiden und luftförmigen Körper anzuwenden, ist der Gegenstand der mechanischen Wissenschaften.

III. Dasjenige, was uns die Dinge sichtbar macht, d. h. das Licht, bildet den Gegenstand der optischen Wissenschaften oder der Optik überhaupt. Das Licht enthält den Grund zu den interessantesten Erscheinungen der Natur und Kunst, und der Kenntniß jener Gesetze, welchen es bey seinen Bewegungen folgt, verdanken wir eine große Erweiterung unseres Wissens.

An dem Lichte nimmt man vorzüglich dreyerley Grundphänomene wahr, welche die drey Unterabtheilungen der optischen Wissenschaften: die Op-

tik, Catoptrik und Dioptrik bestimmen. Es pflanzt sich nämlich nach einem bestimmten Gesetze geradlinig fort. Es wird von glatten, spiegelnden Körpern nach bestimmtem Gesetze zurückgeworfen, und erleidet, bey seinem Eintritte in durchsichtige Körper von verschiedener Art, eine gesetzmäßige Ablenkung von seiner vorigen Richtung.

IV. Der Gegenstand der astronomischen Wissenschaften ist nicht blos die Erde, welche wir bewohnen, sondern jeder andere sichtbare Himmelskörper. die Bestimmung alles dessen, was auf irgend eine Weise an den Himmelskörpern meßbar ist, macht einen Gegenstand ihrer Untersuchungen aus. Die Fragen: welche Gestalten, welche Entfernungen, welche Größen und Umlaufszeiten haben die Himmelskörper; nach welchen Gesetzen erfolgen ihre Bewegungen und aus welcher Wechselwirkung der Bewegkräfte lassen sich dieselben erklären? gehören in das weite Gebiet ihrer Forschungen. Auch diese astronomischen Wissenschaften werden wieder in besondere Unterabtheilungen gebracht, deren nähere Angabe nicht hierher gehört.

V. Unter den technischen Wissenschaften versteht man jene Lehren, welche einestheils auf Kenntnissen der Naturwissenschaft, anderntheils aber auf mathematischen Anwendungen beruhen; so, daß sie aus diesen vereinigten Wissenschaften hervorgehen. Die bürgerliche Baukunst, die Kriegsbaukunst, die Geschützkunde, die Straß- und Wasserbaukunde, die Forstwissenschaft und mehrere andere erläutern dieses. Da diese technischen Lehren nicht eigentlich als wesentliche Bestandtheile der Mathematik zu betrachten

sind, so werden sie auch gewöhnlich nicht in ihr Gebiet aufgenommen, sondern abgesöndert und für sich selber behandelt.

§. 5.

Uebungs-Fragen.

I. Was versteht man unter Größe überhaupt? — Was ist die Mathematik oder Größenlehre? (§. 1.)

II. Wann wird eine Größe rein, wann angewandt betrachtet? Was ist die reine Mathematik? Was ist die angewandte Mathematik? (§. 2.)

III. Was sind Zahlgrößen? Was sind Raumgrößen? Was versteht man unter Zahlenlehre oder Arithmetik? Was nennt man Raumlehre oder Geometrie? (§. 3.)

IV. Wieviele Haupttheile hat die angewandte Mathematik? — Was sind die mechanischen Wissenschaften? — Was nennt man Kraft? — Was sind die optischen Wissenschaften und ihre Haupttheile? — Was sind die astronomischen Wissenschaften? Was nennt man technische Wissenschaften? (§ 4.)

II. Lehrübung.

Kurze Uebersicht der mathematischen Methode.

§. 1.

Allgemeine Uebersicht. Erklärung und ihre Arten.

I. Unter der mathematischen Methode versteht man die, den Mathematikern eigenthümliche Art und Weise, ihre Lehren vorzutragen. Das Wesentliche

derselben besteht darin, daß sie mit Erklärungen anfängt, aus diesen einfache Sätze ableitet, deren Wahrheit schon von selbst einleuchtet, hierauf weitere Lehren bauet, deren Grund mit größter Schärfe nachgewiesen wird, und endlich aus diesem allem solche Folgerungen zieht, welche dem gesunden Menschenverstande, ohne fernere Beweisführung, Ueberzeugung gewähren.

II. Man versteht aber unter einer Erklärung die Angabe jener Merkmale, wodurch sich ein Gegenstand von allen übrigen unterscheidet; z. B. wenn man sagt: das Dreyeck ist eine von drey Linien eingeschlossene Figur. Diese Erklärungen dienen (wie das Wort schon andeutet) zur Aufklärung der Begriffe. Sie sind die ersten Bedingnisse zum klaren und richtigen Denken, welches bey verworrenen oder unbestimmten Begriffen durchaus nicht bestehen kann.

III. Diese Erklärungen sind aber von doppelter Art. Entweder dienen sie dazu, um die Entstehung jenes Gegenstandes zu zeigen, welcher durch sie erklärt wird, oder sie bezeichnen blos den Begriff, den man mit einem gewissen Worte verbindet. Jene werden Sacherklärungen (Realdefinitionen) diese aber Worterklärungen (Nominaldefinitionen) genennt. Die Erklärung: Wenn sich eine gerade, in einer Ebene liegende Linie um ihren einen festen Endpunct so herumdreht, daß ihr anderer Endpunct Spuren seiner Bewegung zurückläßt, so entsteht die Kreislinie, ist eine Sacherklärung, weil die Entstehung der Kreislinie mit voller Ueberzeugung hieraus hervorgeht. Sagt man aber: Das Quadrat ist ein Viereck, welches vier gleiche Seiten und vier

rechte Winkel hat, so ist dieses eine bloße Worterklärung, weil man noch nicht weiß, ob eine solche Figur möglich sey, und wie sie gebildet werde.

IV. Hieraus folgt, daß die Sacherklärungen den bloßen Worterklärungen vorzuziehen sind, da jene die wirkliche Entstehung des zu erklärenden Gegenstandes zeigen; diese aber noch unentschieden lassen, ob derselbe überhaupt möglich sey, oder nicht. Alle in der Mathematik vorkommende Worterklärungen müßen durch die Lehren der Wissenschaft in Sacherklärungen verwandelt werden.

§. 2.

Grundsätze überhaupt. Axiome und Postulate.

I. Ein Satz, dessen Wahrheit so klar einleuchtet, daß sie ohne fernern Beweis jedem erkennbar ist, wenn er nur ihren Sinn versteht, wird ein Grundsatz im allgemeinen genennt. Die Sätze: das Ganze ist so groß, wie alle seine Theile zusammengenommen; oder: ein Theil allein ist kleiner, als das Ganze; oder: wenn man gleiche Stücke von gleichen Ganzen hinwegnimmt, so bleiben gleiche Stücke übrig; oder: eine gegebene gerade Linie größer oder kleiner zu machen; oder: mit einer in einer Ebene gegebenen geraden Linie einen Kreis zu beschreiben u. s. f. sind Grundsätze.

II. Wenn diese Grundsätze Behauptungen enthalten, d. h, wenn sie aussprechen, daß etwas ist, so werden sie Axiome genennt; enthalten sie aber eine Foderung, d. h. verlangen sie, daß irgend etwas geschehen soll, so sind es Postulate oder Foderungen. Die Sätze: wenn die Größe A größer ist, als die

Größe B, und B wiederum größeriſt, als die Größe C, ſo muß auch A größer als C ſeyn; oder: wenn A ſo groß als B, und B ſo groß als C iſt, ſo muß auch A ſo groß als C ſeyn, ſind Axiome. Die Sätze aber: eine gegebene Zahl vergrößern oder zu verkleinern; oder: von einer gegebenen geraden Linie eine kleinere gerade Linie hinweg zu nehmen ſind Poſtulate.

§. 3.

Die Lehrſätze und die Aufgaben.

I. Wenn ein Satz eine Behauptung enthält, welche nicht für ſich ſelbſt ſchon einleuchtend iſt und deshalb einer überzeugenden Begründung bedarf, ſo heißt derſelbe ein Lehrſatz oder Theorem. Der Satz: wenn man den Nenner eines gegebenen Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt und deſſen Zähler unverändert läßt, ſo wird der Werth des Bruchs ſoviel-mal kleiner, als jene Zahl Einheiten enthält, iſt ein Lehrſatz, da deſſen Wahrheit nicht jedem, wenn er auch ſeinen Sinn gehörig verſteht, von ſelbſt ſchon einleuchtet. Auf ähnliche Art verhält es ſich mit dem Satze der Geometrie: in jedem Dreyecke liegt der größern Seite der größere Winkel, und umgekehrt, auch dem größern Winkel die größere Seite gegenüber.

II. Zur Vollſtändigkeit des Lehrſatzes gehört demnach noch der Beweis, d. h. eine ſolche Verbindung von Gründen, wodurch der Verſtand genöthigt wird, die Wahrheit der Behauptung zu erkennen. Dieſer Beweis iſt entweder ein directer oder ein indirecter. Bey jenem wird die Wahrheit der Behauptung aus

solchen Gründen erkannt, welche in dem Innern der Sache selbst liegen; bey diesem aber wird die Wahrheit derselben aus der Unmöglichkeit ihres Gegentheils abgeleitet. Wenn man z. B. den vorhin bemerkten Satz von dem Kleinerwerden eines Bruches aus dem Begriffe des Nenners dadurch beweiset, daß der Nenner anzeigt, in wie viele gleiche Theile das Ganze eingetheilt ist, wo denn sogleich erhellet, daß, wenn z. B. aus dem nämlichen Ganzen noch einmal so viel Theile gemacht werden, jeder einzelne Theil nur halb so groß seyn kann u. s. w. so bildet dieses einen directen (ostensiven) Beweis. Würde aber z. B. die Gleichheit zweyer geraden Linien A und B dadurch erkannt, daß A weder größer noch kleiner als B seyn könne, so wäre dieses ein indirecter (apagogischer) Beweis.

III. Eine Aufgabe oder ein Problem ist jener Satz, welcher eine Foderung enthält, die aber nicht so einfach ist, daß man ihr ohne weitere Anweisung entsprechen könnte. Z. B. dienen die Sätze: zwey gegebene Brüche sollen mit einander multiplicirt werden; oder: ein gegebenes Dreyeck in ein Viereck von derselbigen Größe zu verwandeln.

Zur Aufgabe gehört daher eine Auflösung d. h. die bestimmte Angabe, wie man zu verfahren hat, um der in ihr enthaltenen Foderung zu entsprechen.

Da man aber auch von der Richtigkeit der gegebenen Auflösung überzeugt seyn will, so muß auch hier ein Beweis folgen, welcher darthut, daß die angeführte Auflösung auf wahren Vodersätzen beruht.

§. 4.

Zusätze. Anmerkungen. Willkührliche Sätze. Lehnsätze.

I. Unter Zusätzen oder Corolarien versteht man jene Sätze, deren Wahrheit so einfach aus den bewiesenen Vodersätzen hervorgeht, daß sie keines besondern Beweises bedürfen. Sie sind daher als leichte Folgerungen aus schon erwiesenen Wahrheiten anzusehen. Wenn man z. B. in der Geometrie bewiesen hat, daß die Summe der drey Winkel in jedem Dreyecke so viel als zwey rechte Winkel beträgt, so ist es ein Zusatz, wenn man sagt: daher ist die Summe der beyden spitzen Winkel in jedem rechtwinkeligen Dreyecke einem rechten Winkel gleich. Da es ermüdend wäre, dieselbigen Beweise immer zu wiederholen, so kann man sie zur Abkürzung des Vortrags hinweglassen.

II. Die Anmerkungen oder Scholien enthalten alles dasjenige, was in Bezug auf den Vortrag auf irgend eine Weise lehrreich ist. Man gibt in ihnen andere Beweise der schon bewiesenen Lehrsätze, oder andere Auflösungen der früheren Aufgaben. Auch werden darin Zahlenbeyspiele zur Erläuterung der allgemeinen Sätze oder andere literärische Notizen u. d. gl. beygebracht.

III. Willkührliche Sätze werden jene genennt, welche nicht in der Natur der Sache, sondern in der Willkühr des Menschen ihren Grund haben. So ist es z. B. eine blos willkührliche Annahme der Arithmetik, daß man gerade auf zehn zählt, da man auch auf eine größere oder geringere Menge hätte zählen können. Eben so willkührlich ist es, jener Ziffer, wel-

che einer andern unmittelbar zur Linken steht, vermöge dieser Stelle, einer zehnfach höhern Werth zu geben.

IV. Auch Lehnsätze und Lemmen kommen in dem mathematischen Lehr-Vortrage vor. Es sind jene Sätze, welche theils aus andern Wissenschaften, theils aus andern Theilen der nämlichen Wissenschaft, zur größern Vollständigkeit des Vortrags, aufgenommen werden. So kommen z. B. in der practischen Geometrie Lehnsätze aus der Optik, in der Arithmetik Lehnsätze aus der Geometrie oder Forstwissenschaft u. s. w. vor, wenn ihre Lehren auf diese Wissenschaften angewendet werden. Der Grund, worauf der Gebrauch dieser Lehnsätze beruht, liegt in der engen Verbindung, worin solche Wissenschaften, wenn sie gleich sehr verschiedenartig erscheinen, dennoch mit einander stehen.

§. 5.

Nutzen des Studiums der Mathematik.

I. Der Nutzen, welchen das mathematische Studium gewährt, ist vorzüglich von doppelter Art, nach dem man entweder die Bildung des Geistes, oder das practische Bedürfniß der Menschen dabey berücksichtigt.

II. Wenn der mathematische Lehrvortrag mit vollständigen Erklärungen beginnt, aus welchen unbestreitbare Grundsätze als Axiome oder Postulate abgeleitet werden; wenn Lehrsätze und Aufgaben nicht blos aufgestellt, sondern auf das befriedigendste bewiesen und aus ihnen leicht faßliche Sätze abgeleitet werden, so muß sich der menschliche Geist, welcher diesem streng wissenschaftlichen Gange folgt, nach und nach an

Klarheit der Begriffe und an Gründlichkeit im Denken gewöhnen, denn Klarheit der Begriffe wird durch befriedigende Erklärungen; Gründlichkeit im Denken aber durch eine solche Verkettung von Schlüssen erhalten, woraus man erkennt, wie eine Wahrheit aus der andern hervorgeht, und wie alle, den Gliedern der Kette gleich, in lückenlosem Zusammenhange stehen. Da es für den Menschen nichts Wichtigeres gibt, als die Bildung des edelsten Theils seiner selbst, so ist dieser Nutzen, welcher aus dem gründlichen Studium der Mathematik unfehlbar hervorgeht, von ganz vorzüglichem Werthe.

III. Ausserdem nützt die Mathematik in ihren höchst mannigfaltigen Anwendungen auf das bürgerliche Leben, und hierin besteht ihr practischer Werth. Die Arithmetik greift in allen ihren Theilen in den gegenseitigen Verkehr der Menschen ein. Eben so bekannt ist der Nutzen der practischen Feldmeßkunst. Kein Theil der angewandten Mathematik ist ohne bedeutenden Einfluß auf Künste, Fabrikwesen und Gewerbe; die gesammten Naturwissenschaften können ohne mathematische Anwendungen nicht gedeihen; der Oeconomie, so wie der Cameral- Finanz- Staats- und Forstwissenschaft ist sie ein unentbehrliches Hülfsmittel zur vollkommnern Darstellung ihrer Lehren. Auf gleiche Weise steht sie noch mit vielen andern Zweigen des menschlichen Wissens in engster Verbindung.

§. 6.

Schlußbemerkung.

In dem folgenden Vortrage dieser Schrift werden die einzelnen §§., zur bequemern Uebersicht ihres Inhaltes, zwar besondere Aufschriften (wie auch bis hieher geschehen ist) erhalten; indessen werden die mathematischen Kunstworte; Erklärung, Grundsatz, Lehrsatz, Aufgabe u. s. w. nicht besonders dabey ausgedrückt werden. Da aber der Inhalt jedes einzelnen §. sich unter eine dieser Rubricken ordnen läßt, so ist es eine empfehlenswerthe Verstandesübung für die Anfänger, vorbemerkte Kunstworte auf den Inhalt dieser einzelnen §§. gehörig anzuwenden.

§. 7.

Übungs-Fragen.

I. Was ist die mathematische Methode und welchen Gang nimmt sie? — Was sind Erklärungen und wievielerley? — Welche haben den Vorzug? (§. 1.)

II. Was sind Grundsätze überhaupt? Axiome und Postulate im Besondern? (§. 2.)

III. Was sind Lehrsätze und aus welchen Theilen bestehen sie? Was und wievielerley ist der Beweis? — Was sind Aufgaben und wieviele Stücke gehören zu ihnen? (§. 3.)

IV. Was nennt man Zusätze, Anmerkungen, willkührliche Sätze, Lehnsätze? (§. 4.)

V. Welchen Nutzen gewährt das Studium der Mathematik? Worin besteht ihr theoretischer, worin ihr practischer Werth? (§. 5.)

VI. Wie können die folgenden §§. dieser Schrift zur Erläuterung der mathematischen Kunstworte: Erklärung, Grundsatz u. s. w. benützt werden? (§. 6.)

Zweyter Lehrgang.

Allgemeine Betrachtung der Zahlen und ihrer Veränderungen.

I. Lehrübung.

Begriff der Zahl und der Einheit. Veränderungen mit Zahlen.

§. 1.

Gleichartige und ungleichartige Dinge.

I. Man nennt mehrere Dinge gleichartige oder voneinerley Art, wenn sie nach solchen Merkmalen betrachtet werden, welche sie mit einander gemein haben; sieht man dagegen auf jene Merkmale, welche ihnen nicht gemeinschaftlich sind, so heißen sie ungleichartige Dinge, oder Dinge von verschiedener Art. Betrachtet man z. B. die Dreyecke und Vierecke als ebene Figuren, so sind sie in dieser Hinsicht gleichartig, weil sowohl dem Dreyecke, als dem Vierecke das Merkmal Figur zukömmt. Sieht man aber darauf, daß jene Figur gerade drey, diese aber vier Seiten hat, so sind sie in diesem Betrachte verschiedenartige Dinge.

II. Die Pflanzen und die Thiere haben mit einander gemein, daß sie organische Wesen sind, d. h. daß sie die aufgenommenen Nahrungsstoffe durch Wirkung einer eigenthümlichen Lebenskraft ihrem Wesen aneignen. Daher sind Pflanzen und Thierkörper als organische Wesen gleichartig. Betrachtet man aber das Thier als einen beseelten, die Pflanze als unbeseelten

Körper, so gehören sie zu Dingen von verschiedener Art.

III. Bisweilen ist die Ungleichartigkeit, welche zwischen mehreren Dingen herrscht, nur scheinbar und kann durch kleine Kunstgriffe weggeschafft werden. Obwohl z. B. Gulden und Kreuzer als solche ungleichartig sind, so kann man eine gegebene Guldenzahl sowohl in Kreuzer, als auch eine gegebene Kreuzerzahl in Gulden verwandeln und somit gleichartig machen.

§. 2.

Begriff der Zahl und der Einheit. Bestimmte und unbestimmte Zahlen.

I. Die Vorstellung, welche wir von einer bestimmten Vielheit gleichartiger Dinge haben, wird eine Zahl genennt, und jedes von diesen gleichartigen Dingen heißt die Einheit. Es folgt aus der Natur der Sache, daß die Einheiten, welche eine Zahl bilden sollen, durchaus gleichartig seyn müßen, da man ungleichartige Dinge nicht in ein Ganzes verbinden kann. So bilden z. B. fünf Ellen und sieben Pfunde nicht die Zahl zwölf, da es weder zwölf Ellen noch zwölf Pfunde sind. Aber fünf Ducaten und sieben Kronthaler, obwohl an sich ungleichartig, können, als Geldstücke betrachtet, die Zahl zwölf bilden.

II. Unter Zählen, oder eine Zahl bilden, versteht man daher das Verfahren, gleichartige Dinge, einzeln genommen, in Gedanken zu einander setzen, und durch ein bestimmtes Wort aussprechen, wie oft dieses geschehen ist.

III. Die Natur der Zahl besteht demnach in einer Vielheit ihrer Einheiten. Da diese Vielheit entweder eine bestimmte oder eine unbestimmte ist, so entstehen hieraus bestimmte oder unbestimmte Zahlen. So sind z. B. die Zahlen acht, zwanzig, hundert, bestimmte Zahlen; die Zahl, welche man sich unter dem Buchstaben a nach Belieben denken kann, ist eine unbestimmte, da dieser Buchstabe als allgemeines Zahlzeichen betrachtet werden kann; so wie man z. B. von einer Zahl überhaupt spricht, ohne sich eine bestimmte Vielheit von Einheiten darunter zu denken.

§. 3.

Veränderlichkeit der Größe der Einheit. Gleiche und ungleiche Zahlen.

I. Der Begriff der Einheit, welcher jeder Zahl zur Grundlage dient, ist durchaus bestimmt und unveränderlich, da man unter der Einheit immer eine, durchaus bestimmte, für sich als ein Ganzes bestehende Größe versteht. Aber die Größe dieser Einheit kann sehr veränderlich seyn, und die Annahme dieser Größe ist meistens der Willkühr überlassen. So dient z. B. das Pfund zur Einheit der Gewichte, obwohl seine Größe in verschiedenen Ländern höchst verschieden ist. Eben so ist der Fuß die Einheit des Längenmaases, obgleich seine Länge ebenfalls sehr verschieden erscheint. Bey Verfertigung des Grundrisses einzelner Aecker oder Wiesen nimmt man eine größere, bey Verfertigung des Grundrißes einer ganzen Dorfgemarkung oder gar einer ganzen Provinz, eine weit kleinere Linie zur Einheit an. Obwohl die Größe der

Einheit demnach sehr verschieden seyn kann, so muß dieselbe dennoch für ein und dieselbe Anwendung durchaus von einerley Größe bleiben, weil sonst nur widersprechende Resultate hervorgehen würden.

II. Wenn zwey Zahlen aus gleich vielen, gleich großen und gleichartigen Einheiten bestehen, so werden sie gleiche Zahlen genennt. Setzt man die Gleichartigkeit und Unveränderlichkeit in der Größe der Einheit als Bedingniß voraus, so läßt sich sagen: gleiche Zahlen sind jene, welche aus gleich vielen Einheiten bestehen; ungleiche aber solche, welche verschiedene Mengen von Einheiten enthalten.

Eine Zahl, welche mehr Einheiten, als eine andere enthält, wird die größere; jene aber, welche weniger Einheiten in sich faßt, eine kleinere Zahl genennt.

§. 4.

Allgemeinste Veränderungen mit den Zahlen.

I. Aus dem Bisherigen geht hervor, das eine Zahl nur auf doppelte Weise verändert werden kann. Da sie nämlich aus einer bestimmten Menge von Einheiten besteht, so kann diese Menge nur dadurch verändert werden, daß mehrere Einheiten hinzugesetzt, oder daß von ihren Einheiten hinweggenommen werden. Daher wird eine Zahl vermehrt, wenn man ihr gleichartige Einheiten beyfügt, und vermindert, wenn man eine oder mehrere ihrer Einheiten hinweg nimmt.

II. Daher sind Vermehren und Vermindern die einzigen Veränderungen, welche mit Zahlen Statt finden

können, und auf ihnen muß im Allgemeinen jede Rechnungsweise beruhen.

III. Wenn die Einheiten, welche man einer Zahl beyfügt, ungleichartig mit ihr sind, so wird jene Zahl durch sie nicht vermehrt. Haben aber die Einheiten der gegebenen Zahl und jene neu hinzu gekommenen irgend ein gemeinschaftliches Merkmal, wodurch sie als gleichartig zu betrachten sind, so hat in dieser Hinsicht eine wirkliche Vermehrung Statt. So wird z. B. die Zahl der auf einem Tische liegenden Ducaten dadurch nicht vermehrt, daß noch eine bestimmte Menge von Kronthalern hinzukömmt; aber die Zahl der auf dem Tische befindlichen Geldstücke wird offenbar hierdurch vermehrt

§. 5.

Uebungs-Fragen.

I. Was sind gleichartige und ungleichartige Dinge? Wann ist diese Ungleichartigkeit nur scheinbar? (§. 1.)

II. Was ist die Zahl und die Einheit? Was heißt Zählen? Was sind bestimmte und unbestimmte Zahlen? (§. 2.)

III. Ist der Begriff der Einheit veränderlich? Kann die Größe der Einheit veränderlich seyn? Was sind gleiche und ungleiche Zahlen? Was ist die größere, was die kleinere Zahl? (§. 3.)

IV. Was sind die allgemeinsten Veränderungen, welche mit Zahlen Statt finden? Was heißt: eine Zahl vermehren und eine Zahl vermindern? (§. 4.)

V. Wie lassen sich diese sämtliche Begriffe durch Beyspiele erläutern?

II. Lehrübung.

Vermehrungsarten der Zahlen.

§. 1.

Begriff der Addition und Multiplication.

I. Die Vermehrung der Zahlen kann auf doppelte Weise geschehen. Entweder setzt man zu einer gegebenen Zahl nach und nach andere, welche untereinander ungleich sind, oder man setzt eine und dieselbige Zahl mehrmal zu sich selbst. Jene Vermehrungsweise wird die Addition; diese aber die Multiplication genennt.

Wer z. B. die Zahlen sieben und fünf und acht und zehn zusammen in eine einzige verbindet, um die Zahl dreyßig zu erhalten, hat diese Zahlen zusammen addirt.

Wer aber die Zahl acht z. B. sechs mal zu sich selbst setzt, wodurch man acht und vierzig erhält, hat jene Zahl acht mit sechs multiplicirt.

II. Die Addition ist daher jene Vermehrungsart, wodurch mehrere einander ungleiche Zahlen in eine einzige gebracht werden, welche ihnen zusammen genommen gleich ist.

Die Multiplication dagegen ist jene Vermehrungsweise, wodurch eine gegebene Zahl so oft zu sich selbst gesetzt wird, als wie oft eine andere gegebene die Einheit enthält.

§. 2.

Grundbegriffe der Addition und Multiplication.

I. Bey der Addition sind mehrere ungleiche Zahlen gegeben, welche in eine einzige zusammengebracht werden sollen. Man nennt sie die zu addirenden oder die zu summirenden Zahlen. Jene neu entstandene Zahl aber, welche diesen gegebenen zusammen genommen gleich ist, heißt die Summe.

II. Bey der Multiplication wird jene Zahl, welche mehrmal zu sich selbst gesetzt werden soll, der Multiplicand; die andere aber, welche anzeigt, wie oft dieses Zusammensetzen geschehen soll, der Multiplicator genennt. So wohl der Multiplicand, als Multiplicator werden mit dem gemeinsamen Namen: Factoren bezeichnet. Die durch die Multiplication entstehende neue Zahl wird das Product oder Factum genennt.

Wenn z. B. acht und fünf und zwölf die zu addirenden Zahlen sind, so wird fünf und zwanzig die Summe seyn.

Soll aber z. B. die Zahl neun mit sieben multiplicirt, d. h. soll neun gerade siebenmal zu sich selbst gesetzt werden, so heißt neun der Multiplicand, sieben der Multiplicator, und drey und sechzig wird das Product.

§. 3.

Grundsätze der Addition.

Aus dem Begriffe der Addition gehen nachfolgende Sätze hervor, deren Wahrheit jedem einleuchtet, sobald er nur ihren Sinn versteht.

I. Die zu addirenden Zahlen müßen entweder schon wirklich gleichartig seyn, oder gleichartig gemacht werden können. Denn sie sollen sich in der Summe zu einer einzigen Zahl vereinigen.

II. Da die Summe als das Ganze; die zu summirenden Zahlen aber als dessen Theile zu betrachten sind, so kann man jene für diese, und diese wiederum statt jener setzen. Denn alle Theile zusammen genommen bilden das Ganze, so wie auch das Ganze als Inbegriff aller seiner Theile zu betrachten ist.

III. Es ist vollkommen einerley, in welcher Ordnung man die zu addirenden Zahlen zusammen zählt, wenn sie nur alle in der Summe vorkommen. Daher ist z. B. fünf und sieben und neun so viel als fünf und neun und sieben, oder als neun und fünf und sieben oder als neun und sieben und fünf u. s. w.

§. 4.

Grundsätze der Multiplication.

Aus der Natur der Multiplication fließen ebenfalls folgende Sätze, welche ihrer Einfachheit wegen, als Axiome zu betrachten sind:

I. Die Muliplication kann als eine wiederholte Addition angesehen werden, von welcher sie nur darin verschieden ist, daß hier eine und dieselbe Zahl mehrmal zu sich selbst gesetzt wird.

II. Der Multiplicand muß so oft in dem Producte enthalten seyn, als wie oft der Multiplicator die Einheit enthält. Denn, da z. B. die Zahl sechs mit fünf multipliciren nichts anderst heißt, als jene Zahl

fünf mal vergrößern, so muß auch das Product dreyßig jene Zahl sechs wirklich fünf mal enthalten.

III. Auch ist der Multiplicator so oft im Producte enthalten, als wie viele Einheiten im Multiplicanden sind. Denn wenn man die Zahl fünf z. B. vier mal nimmt, so wird eben hierdurch auch die Zahl vier wieder fünfmal genommen, wodurch in jedem Falle zwanzig entsteht.

IV. Daher sagt man zwey Factoren gegeben, auch in veränderter Ordnung, dennoch einerley Product. Ob die Zahl sieben z. B. fünfmal, oder die Zahl fünf wieder siebenmal genommen wird, ist vollkommen einerley.

§. 5.

Uebungs-Fragen.

I. Wie entsteht aus dem Vermehren der Zahlen die Addition und die Multiplication? Was ist die Addition, was die Multiplication? (§. 1.)

II. Was sind die zu addirenden Zahlen, was ist die Summe? Was ist der Multiplicand, der Multiplicator und das Product? (§. 2.)

III. Auf welchen Grundsätzen beruht die Addition? (§. 3.)

IV. Welche Grundsätze gehen aus dem Begriffe der Multiplication hervor? (§. 4.)

V. Wie werden die Antworten dieser Fragen in Beyspielen erläutert?

III. Lehrübung.

Verminderungsarten der Zahlen.

§. 1.

Begriff der Subtraction und Division.

I. Gleichwie es eine doppelte Vermehrungsart der Zahlen gibt, so hat auch eine doppelte Verminderungsweise bey ihnen Statt. Wenn eine größere und eine kleinere Zahl gegeben ist, so kann diese von jener entweder nur einmal, oder so oft hinweggenommen werden, als es möglich ist. Hieraus entsteht die Subtraction und Division.

Wer z. B. von der Zahl fünfzehn, die Zahl neun einmal hinwegnimmt und hierdurch die Zahl sechs erhält, hat subtrahirt. Wer aber z. B. von fünfzehn die Zahl fünf gerade dreymal hinter einander hinwegnimmt, bis von jener nichts mehr übrig bleibt, der hat fünfzehn durch fünf dividirt.

II. Die Subtraction ist somit jene Verminderungsart, wodurch man eine kleinere Zahl von einer größern nur einmal hinwegnimmt.

Die Division dagegen ist jene Verminderungsweise, wodurch die kleinere Zahl von der größern so oft hinweggenommen wird, als es geschehen kann, und wobey zugleich bemerkt wird, wie oft dieser Abzug geschehen konnte.

§. 2.

Grundbegriffe der Subtraction und Division.

I. Aus der Erklärung der Subtraction folgt, daß bey ihr zwey Zahlen gegeben seyn müßen; eine von welcher man die andere wegnimmt, und eine zweyte, welche von jener hinweg genommen wird. Die erstere wird die größere; die andere aber die kleinere genennt. Beyde zusammen heißt man die Posten. Jene Zahl aber, welche von der größern übrig bleibt, nachdem man die kleinere davon weggenommen hat, heißt der Rest, Ueberschuß, Unterschied, oder die Differenz. Wenn man z. B. von der Zahl siebenzehn, die Zahl eilf hinwegnimmt, so erhält man sechs zum Reste und die beyden Zahlen siebenzehn und eilf werden die Posten genennt; siebenzehn heißt die größere und eilf die kleinere oder abzuziehende Zahl.

II. Auch bey der Division müßen zwey Zahlen gegeben werden. Man nennt die größere, von welcher die kleinere so oft weggenommen werden soll, als es möglich ist, den Dividenden, oder die zu theilende Zahl. Die kleinere der gegebenen Zahlen, welche von der größern, so oft als es möglich ist, hinweggenommen werden soll, heißt der Divisor oder Theiler, und jene dritte Zahl, welche andeutet, wie oft der Divisor vom Dividenden hinweggenommen werden konnte, wird Quotient genennt. Wenn z. B. die Zahl achtzehn durch drey dividirt werden soll, so ist achtzehn der Dividend, drey der Divisor und die Zahl sechs der Quotient, weil man drey von achtzehn gerade sechsmal hinwegnehmen kann.

§. 3.

Grundsätze der Subtraction.

I. Die beyden Posten müssen gleichartige Zahlen seyn. Denn die kleinere wird als ein Theil der größeren betrachtet.

II. Die Diferenz und die kleinere Zahl zusammengenommen müssen der größern gleich seyn; denn die Differenz zeigt den Unterschied der kleinern von der größern an.

III. Wenn man die Differenz von der größern Zahl hinwegnimmt, so muß die kleinere wieder herauskommen, denn die größere Zahl ist das Ganze, welches aus den beyden Theilen, wovon einer die kleinere Zahl und der andere der Rest ist, besteht.

IV. Die Subtraction und Addition sind einander gerade entgegengesetzt, d. h. wenn man zu einer bestimmten Zahl irgend eine andere addirt, und von der Summe wieder diese nämliche Zahl subtrahirt, so erhält man jene zuerst gegebene Zahl wieder.

§. 4.

Grundsätze der Division.

I. Der Divisor ist so oft in dem Dividenden enthalten, als wie oft der Quotient die Einheit enthält, denn so oft der Divisor einmal vom Dividenden hinweggenommen wird, so oft kömmt eine neue Einheit in den Quotienten.

II. Wenn man daher den Divisor mit dem Quotienten multiplicirt, so entsteht zum Producte der Dividend wieder.

III. Wird daher der Dividend durch den Quotienten dividirt, so entsteht zum Resultate der Divisor.

IV. Die Division ist der Multiplication gerade entgegengesetzt. Wenn man irgend eine Zahl mit einer andern multiplicirt und dieses Product durch die letztere wiederum dividirt, so erhält man jene erstere Zahl wieder.

§. 5.

Uebungs-Fragen.

I. Wie entsteht die Subtraction und die Division aus der Verminderung Zahlen? Was ist die Subtraction? Was ist die Division? (§. 1.).

II. Was sind die Posten? Was ist die größere Zahl, was die kleinere Zahl, was der Rest? — Was nennt man Dividend, Divisor, Quotient? (§. 2.).

III. Welche Grundsätze gelten für die Subtraction? (§. 3.).

IV. Wie heißen die Grundsätze für die Division? (§. 4.).

V. Wie werden diese sämmtliche Begriffe und Sätze durch Zahlen erläutert?

Dritter Lehrgang.

Die Zifferrechnung in ihren vier Grundoperationen.

I. Lehrübung.

Grundsätze des zehntheiligen Zahlensystems.

§. 1.

Unterschied zwischen Zahl und Ziffer. Benennung bestimmter Zahlen.

I. Unter Zahl versteht man eine bestimmte Menge von gleichartigen Dingen; unter Ziffer dagegen jene willkührliche Zeichen, welche man zur bequemen Darstellung bestimmter Zahlen gewählt hat.

II. Die Einheit, für sich allein betrachtet, nennt man Eins, und bezeichnet es mit 1. Fügt man noch eine Einheit bey, so entsteht die kleinste Zahl von zwey Einheiten oder Zwey (2); kömmt dazu noch eine Einheit, so heißt die Zahl Drey (3); dieser wieder eine zugesetzt gibt Vier (4); zu vier eine, ist Fünf (5); zu fünf eine gibt Sechs (6); zu sechs eine, Sieben (7); zu sieben eine, Acht (8); zu acht eine Neun (9); zu neun eine gibt Zehn u. s. w. nach den bekannten Namen: Eilf, Zwölf, Dreyzehn, Vierzehn, Fünfzehn, Sechzehn, Siebenzehn, Achtzehn und Neunzehn. Eine Zahl von zweymal zehn heißt Zwanzig; von dreymal zehn, Dreyßig; von viermal zehn Vierzig; von fünfmal zehn Fünfzig; von sechsmal zehn Sechzig; von sieben-

mal zehn Siebenzig; von achtmal zehn Achtzig; von neunmal zehn Neunzig und von zehnmal zehn Hundert. Zehnmal hundert heißt Tausend; tausendmal tausend eine Million; millionmal Million eine Billion; millionmal Billion eine Trillion u. s. w.

III. Die Aufgabe: Alle mögliche Zahlen durch Hülfe von neun Ziffern (nebst der Nulle) bequem darzustellen, ist eine der interessantesten, nicht blos für die Bequemlichkeit im Rechnen, sondern auch als sehr merkwürdige Erfindung, vermittelst wenig Zeichen eine sehr große Mannigfaltigkeit von Verbindungen auszudrücken.

§. 2.

Grundsätze des zehntheiligen Zahlen-Systems.

Das Zahlensystem, welches unserer gesammten Arithmetik zur Grundlage dient und welches das zehntheilige oder das decadische genennt wird, beruht auf folgenden zwey willkührlichen Annahmen:

I. Man zähle auf zehn und steige nach diesem Gesetze immer zum zehnfach höhern empor; so, daß man immer zehnfach größere Zahlenwerthe erhält, welche mit den Worten: Zehner, Hundertter, Tausendter, Zehntausendter Hunderttausendter u. s. f. bezeichnet werden;

II. Man nehme an, daß jede Ziffer, welche einer andern unmittelbar zur Linken steht, vermöge dieser Stelle, einen zehnfach höheren Werth habe.

Aus der ersten Annahme folgt, daß jene Zahl,

sey sie auch noch so groß, durch die Menge der in ihr enthaltenen Einer, Zehner, Hundertter, Tausendter u. s. f. bestimmt werden kann, und die zweyte Annahme macht es begreiflich, wie man den Werth von irgend einer Ziffer aus jener Stelle erkennen kann, welche sie in Bezug auf eine andere, neben ihr stehende, einnimmt.

So bedeutet z. B. die Ziffer 8, wenn sie allein steht, eine Menge von 8 Einern. Setzt man ihr die Ziffer 6 unmittelbar zur Linken, so bedeutet letztere, vermöge ihrer Stelle, 6 Zehner; setzt man dieser 6 zur Linken die Ziffer 5, so bedeutet sie, nach ihrer Stelle, 5 Hundertte und diese drey nebeneinander stehenden Ziffer würden eine Menge von 3 Hundertten, 6 Zehnern und 8 Einern ausdrücken, wofür wir fünf hundert, achtund sechzig sagen.

III. Es war willkührlich, daß man gerade auf zehn gezählt hat. Wahrscheinlich ist es durch die Zahl der Finger veranlaßt worden, weil ein gewisser Instinct den Menschen antreibt, an den Fingern zu zählen Man hätte aber auch auf zwölf zählen können, wodurch man anstatt: Einer, Zehner, Hundertter u. s. w. nunmehr Einer, Zwölfer, Einhundert vier und vierziger u. s. f. erhalten hätte. Diese Art zu zählen kann man die zwölftheilige nennen. Am Einfachsten würde man nur auf zwey zählen. Dieses gäbe das zweytheilige oder dyadische Zahlen-System welches schon Leibnitz angeführt hat.

§. 3.

Zifferwerth und Stellenwerth. Ordnungen.

I. Aus dem Bisherigen folgt deutlich, daß jede Ziffer, welche sich in einer Verbindung von andern, neben ihr stehenden befindet, einen doppelten Werth habe; nämlich einen Zifferwerth und einen Stellenwerth. Jeder dieser Werthe allein bestimmt den Gesammtwerth der Ziffer nicht; dieser geht vielmehr nur aus Verbindung von beyden hervor. Man denke sich z. B. die Ziffer:

7 9 3 6 4 8 5

so hat die 4 einen Stellenwerth von Hundertten und einen Zifferwerth von vier. Der Stellenwerth von 3 ist Zehntausende; ihr Zifferwerth aber drey. Eben so bedeutet 7 nach seinem Stellenwerthe Millionen und nach seinem Zifferwerthe sieben. Daher sind jene 4 so viel als vier Hundert; jene 3 so viel als dreyßig Tausend, und jene 7 so viel als sieben Millionen.

Auf diese Weise kann man den Werth einer jeden in Ziffern gegebenen ganzen Zahl bestimmen, indem sowohl der Stellen- als der Zifferwerth jeder in ihr befindlichen Ziffer mit Worten ausgedrückt wird.

II. Dächte man sich die Bedeutung der Ziffer 243 nach dem zwölftheiligen Systeme, so würde 3 so viel als drey Einer, 4 so viel als vier Zwölfer, und 2 so viel als zwey Ein hundert vier und vierziger bedeuten.

Nach dem zweytheiligen Systeme bedeutet in den Ziffern 8532, die 2 so viel als zwey Einer, die 3

so viel als drey Zweyer, die 5 so viel als fünf Vierer und die 8 so viel als acht Achter.

III. Man nennt die Zehner, Hunderte, Tausende, Zehntausende u. s. w. woraus eine gegebene Zahl besteht, die Ordnungen der Zahl, woraus klar ist, was man unter höhern und niedern Ordnungen versteht. Es sind z. B. die Hunderte gegen die Zehner von der zehnfach höheren; gegen die Tausende aber von der zehnfach niedern Ordnung. Auch bilden die Zehner die erste, die Hunderte die zweyte Ordnung u. s. w.

§. 4.

Aussprechen der in Ziffer gegebenen Zahlen.

Soll man eine durch Ziffer gegebene Zahl mit Worten aussprechen, so beruht die Auflösung darauf, daß für jede Ziffer der ihr zugehörige doppelte Werth gehörig benennt wird. Am Bequemsten theilt man die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Gefache von drey Ziffern und bemerkt die Millionen mit einem oberhalb der Ziffer gesetzten Puncte, die Billionen mit zwey, die Trillionen mit drey solcher Puncte u. s. f. Nach diesem spricht man, bey der höchsten Stelle anfangend, jede einzelne Ziffer nach ihrem doppelten Werthe aus und schreitet so bis zu den Einern fort. Befinden sich Nullen in der Zahl, so übergeht man sie im Aussprechen.

I. Man soll die Zahl 187439652 aussprechen. Dieses gibt folgendes

2 Einer.
5 Zehner.
6 Hunderter.
9, Tausendter.
3 Zehntausendter.
4 Hunderttausendter.
7, Einer von Millionen.
8 Zehner von Millionen.
1 Hunderter von Millionen.

Man spricht: Einmal Hundert sieben und achtzig Millionen, viermal hundert neun und dreyßig Tausend, sechs Hundert zwey und fünfzig.

Eigentlich hätte man so sprechen sollen: Ein hundert Millionen, achtzig Millionen, sieben Millionen, viermal hundert Tausend, dreyßig Tausend, neun Tausend, sechs Hundert, fünfzig und zwey. Allein der hergebrachte Sprachgebrauch will es anderst.

II. Die Zahl 28462974532845 steht, gehörig abgetheilt, also:

28̈,462,974̇,532,845 und heißt:

Acht und zwanzig Billionen, viermal hundert zwey und sechzig Tausend, neun hundert vier und siebenzig Millionen, fünfmal Hundert zwey und dreyßig Tausend, acht Hundert fünf und Vierzig.

III. Die Zahl 74000280036004508 gibt, gehörig eingetheilt, dieses:

74,000̈,280,036̇,004,508 oder mit Worten: Vier und siebenzig tausend Billionen, zweymal

hundert achtzig Tausend sechs und dreyßig Millionen, vier Tausend, fünf Hundert und acht.

§. 5.

Zifferschrift einer mit Worten ausgesprochenen Zahl.

Die Aufgabe: eine mit Worten ausgesprochene Zahl durch Ziffer gehörig anzuschreiben, ist gerade die umgekehrte der vorigen. Es kömmt hier darauf an, jede in Worten angegebene Ordnung nach ihrem gehörigen Stellenwerthe und jede Menge der in ihr vorhandenen Einheiten mit dem entsprechenden Zifferwerthe zu bezeichnen. Ordnungen, welche nicht genennt sind, werden mit Nullen ausgefüllt. Nach unserem Sprachgebrauche können wir die Ziffer größerer Zahlen nicht eher richtig schreiben, bis wenigstens drey auf einander folgende Ordnungen genennt sind. Folgende Beyspiele dienen zur Erläuterung:

I. Soll man die Zahl: Sechs und vierzig Millionen, achtmal Hundert drey und vierzig Tausend, zwey hundert sieben und Neunzig anschreiben, so ist klar, daß in jeder Ordnung geltende Ziffer vorhanden sind, weil keine dieser Ordnungen übergangen ist. Daher heißt die Zahl so viel als: 46 Millionen, 8 Hunderttausende, 4 Zehntausende, 3 Tausende, 2 Hunderte, 9 Zehner und 7 Einer, und muß daher so geschrieben werden:

46,843,297

II. In dieser Zahl: Acht hundert und drey Millionen, dreyßig Tausend und neun, fehlt

zwischen den Hundertten und Einern von Millionen die der Zehner von Millionen, welche Stelle mit einer Nulle auszufüllen ist. Da nun auf die Einer von Millionen sogleich die Zehntausende folgen, so fehlen die Hunderttausende, und es muß wieder eine Nulle eingeschalten werden. Endlich sind nach den Zehntausenden unmittelbar die Einer genennt, und daher drey Ordnungen übergangen worden, welche wieder mit drey Nullen auszufüllen sind. Daher ist die Zahl diese: 803,030,009

§. 6.

Uebungs-Fragen.

I. Wis unterscheidet sich die Zahl von der Ziffer? Wie entstehen aus der Einheit die ersten einfachen Zahlen und die höhern Ordnungen? (§. 1.)

II. Auf welchen Grundsätzen beruhet unser zehentheiliges Zahlensystem? Worauf gründet sich das zwölftheilige? Was ist das zweytheilige System? (§. 2.)

III. Was ist der Zifferwerth und der Stellenwerth? Wozu dient dieser Unterschied? Was sind höhere und niedere Ordnungen? Was ist die erste, zweyte, dritte Ordnung? (§. 3.)

IV. Wie wird eine mit Ziffer geschriebene Zahl durch Worte ausgesprochen? Wie wird eine durch Worten gesprochene Zahl in Ziffern dargestellt? (§ 4.)

V. Wie kann man sich durch Zahlenbeyspiele hierin üben?

II. Lehrübung.

Gründe und Ausführung der Addition.

§. 1.

Addition in einfachen Fällen.

Wenn man die Zahlen 241, 3214 und 323 zusammen addiren soll, so wird dieses auf folgende Weise bezeichnet: 241 + 3214 + 323, wo das Zeichen + als willkührliches Zeichen der Addition betrachtet und durch: dazu; oder: mehr; oder: plus ausgesprochen wird.

Da man nur gleichartige Größen zusammen addiren kann, so müssen die gegebenen Zahlen so untereinander gesetzt werden, daß ihre gleichartigen Ordnungen unter einander stehen, welches folgendes gibt:

I. Beyspiel.

241
3214
323

} zu addirende Zahlen.

3778 Summe.

Zählt man nun alle Einer zusammen, so geben sie 8 zur Summe, welche wieder in die Stelle der Einer geschrieben wird. Die Summe aller Zehner ist 7, welche in die Stelle der Zehner kömmt. Die Summe der Hundertter ist ebenfalls 7, welche man unter die Hundertter schreibt. Endlich werden die noch vorhandenen 3 Tausende unverändert in die Stelle der Tausende gesetzt.

Daß auf diese Weise die richtige Summe aller gegebenen Zahlen gefunden wird, folgt daraus, daß man alle Einer, alle Zehner, alle Hundertter u. s. f.

alle höhere Ordnungen gehörig addirt hat. Die Summe aller Theile bildet aber die Summe des Ganzen. Folgende Beyspiele dienen zur fernern Erläuterung:

II. Beyspiel.

320614	
43052	zu addirende Zahlen.
4121	
201010	
568797	Summe.

III. Beyspiel.

32041	
6324	
10203	zu addirende Zahlen.
1030	
200	
49798	Summe.

§. 2.

Addition in zusammengesetztern Fällen.

Wenn die Zahlen 2478, 469, 64935, 78 und 5462 addirt werden sollen, welches durch 2478+469+64935 +78+5462 angedeutet wird, so schreibe man sie zuerst, nach dem Gesetze der Gleichartigkeit, folgender Gestalt unter einander:

I, Beyspiel.

2478	
469	
64935	zu addirende Zahlen.
78	
5462	
73422	Summe.

Diese Summe ist so entstanden. Da alle Einer 32 betrugen; 32 aber 2 Einer und 3 Zehner enthält, so schrieb man nur diese 2 Einer in ihre Stelle und be-

hielt die 3 Zehner, wie man sagt, im Sinne, um sie mit den, in der folgenden Ordnung stehenden Zehnern, welchen sie gleichartig sind, wieder zu addiren. Da diese Summe der Zehner auch 32 bildet; 32 Zehner aber aus 2 Zehnern und 3 Hunderttern bestehen, so wurden die beyden Zehner in die ihnen zukommende Stelle gesetzt; die 3 Hundertter aber wieder im Sinne behalten, um sie zu den folgenden Hunderttern zu addiren, mit welchen sie zur Summe 24 bilden. Da aber 24 Hundertter so viel als 4 Hundertter und 2 Tausende sind, so wurden diese 4 Hundertter wieder in die Stelle der Hundertter gesetzt, und die 2 Tausende zu den vorhandenen Tausenden gezählt, mit welchen sie eine Zahl von 13 Tausenden gaben, welche 3 Tausende und 1 Zehntausenden enthalten. Daher kam die Ziffer 3 in die Stelle der Tausende und der 1 Zehntausendter wurde zu den vorhandenen 6 Zehntausenden gezählt, mit welchen er 7 Zehntausende zur Summe gab, welche man auch in die Stelle der Zehntausende gesetzt hat.

Die Richtigkeit des Verfahrens beruht theils darauf, daß die Summe aller Theile auch der Summe der Ganzen gleich ist; theils aber auf dem bekannten Satze, daß man nur gleichartige Größen zusammen addiren kann.

Folgende Beyspiele dienen zur fernern Erläuterung:

II. Beyspiel.

38456	
3904	
638	zu addirenden Zahlen.
4964	
307	
48269	Summe

III. Beyspiel.

53849	
635120	
9874	zu addirenden Zahlen.
83065	
974	
2138	
785020	Summe.

§. 3.

Probe der Addition.

I. Will man von der Richtigkeit einer ausgeführten Addition mit vieler Wahrscheinlichkeit überzeugt seyn, so gewöhne man sich daran, die, in den gleichartigen Ordnungen stehenden Ziffer einmal von Oben nach Unten zusammen zu zählen, um die Summe zu finden. Nach diesem zähle man sie wieder von Unten nach Oben zusammen, um ebenfalls ihre Summe zu bilden. Erhält man in beyden Fällen das nämliche Resultat, so wird die gefundene Summe die richtige seyn, da es höchst unwahrscheinlich ist, daß man sich, bey dem doppelartigen Zusammenzählen der nämlichen Ordnungen, zweymal gerade auf gleiche Weise geirrt haben sollte.

II. Hat man große Reihen von Zahlen zu addiren, so entsteht im Zusammenzählen einzelner Ordnungen um so leichter ein Versehen. Daher thut man wohl, dergleichen längere Zahlreihen durch gezogene Querstriche in kleinere zu theilen, die Theilsummen zu bilden, aus deren Summirung sodann die Hauptsumme hervorgeht. Macht man diese Absönderungsstriche sodann an andern Stellen, und bildet die

Hauptsumme auf ähnliche Weise, so kann man, wenn sie mit der vorigen übereinstimmt, von der Richtigkeit der Rechnung überzeugt seyn. z. B.

3854
60932
8297
542
4236
5028
932

7420 | 83821 erste Theilsumme.

385
82745
374
3852
497

9321 | 95273 zweyte Theilsumme.

187
3253
426
6321
54217

252819 | 73725 dritte Theilsumme

252819 Hauptsumme.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Wie müßen die zu addirenden Zahlen unter einander gesetzt werden, um ihre Summe zu finden? Wie verfährt man, um dieselbe zu bilden? (§. 1.)

II. Wie verrichtet man die Addition in zusammengesetz-

tern Fällen? Worauf beruht das sogenannte im Sinne behalten? (§. 2.)

III. Wie macht man bey kleinern Additions-Beyspielen die Probe? Wie kann man die Richtigkeit größerer Additions-Beyspiele prüfen? (§. 3.)

III. Lehrübung.

Gründe und Ausführung der Multiplication.

§. 1.

Das Einmaleins, die Multiplication mit einer Ziffer.

I. Da die Multiplication von der Addition nicht wesentlich verschieden ist, so findet sie unmittelbar nach dieser eine schickliche Stelle. Der einfachste Fall, welcher hier eintreten kann, ist die Aufgabe: Eine gegebene Zahl mit einer einzelnen Ziffer zu multipliciren. Zu ihrer Auflösung dient sehr bequem das sogenannte Einmaleins, d. h. eine Sammlung aller Producte, welche aus zwey der ersten Ziffer von 1 bis 9 möglich sind. Die Art, dasselbe zu verfertigen, besteht darin, daß man zuerst alle Ziffer von 1 bis 9 in eine wagrechte Reihe nebeneinander, unmittelbar unter jede ihr Doppeltes, dann ihr Dreyfaches, Vierfaches u. s. w. bis zum Neunfachen schreibt. Nämlich:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

II. Soll nun z. B. die Zahl 6549873 mit 6 multiplicirt werden, so heißt dieses soviel, als jene Zahl sechsmal größer zu machen. Dieses könnte zwar dadurch geschehen, daß man sie sechsmal gehörig untereinander stellte und addirte. Allein, es gibt eine bequemere Auflösung, welche sich darauf gründet, daß man alle Einer, alle Zehner, alle Hundertter und alle höhere Ordnungen der gegebenen Zahl, durch Hülfe des Einmaleins, sechsmal größer macht, die hieraus entstehenden Producte, nach dem Gesetze der Gleichartigkeit, an die ihnen zugehörigen Stellen schreibt und sodann diese sechsfachen Producte wieder in eine Summe bringt. Nachfolgendes Beyspiel wird dieses erläutern:

6549873 Multiplicand
6 Multiplicator

18 Sechsfaches der Einer
42 Sechsfaches der Zehner
48 Sechsfaches der Hundertter
54 Sechsfaches der Tausendter
24 Sechsfaches der Zehntausende
30 Sechsfaches der Hunderttausende
36 Sechsfaches der Millionen.

39299238 Summe oder Product.

Die Richtigkeit dieses Verfahres beruht darauf, daß das Sechsfache aller Theile eines Ganzen, dem Sechsfachen des Ganzen gleich ist. Die Theile der Zahlen sind aber ihre Ordnungen.

III. Die gewöhnliche Auflösung dieser Aufgabe wird aber dadurch abgekürzt, daß man Dasjenige, was bey einem gebildeten Producte in die nächst höhere Ordnung gehört, wie man sagt, im Sinne behält und sogleich zu dem nächst höhern Producte addirt z. B.

49783	Multiplicand
8	Multiplicator
398264	Product.

Da 8 mal 3 Einer, 24 Einer, d. h. 4 Einer und 2 Zehner bilden, so schreibt man diese 4 in die Stelle der Einer und behält die 2 Zehner im Sinne, um sie zu dem Producte aus 8 in 8 Zehner, d. h. zu 64 Zehnern zu addiren, wodurch man 66 Zehner, das heißt 6 Zehner und 6 Hundertter erhält. Diese 6 Zehner kommen in ihre gehörige Stelle; die 6 Hundertter aber werden zu 8 mal 7 Hundertter, d. h. zu 56 Hunderttern addirt, womit sie eine Summe von 62 Hunderttern, d. h. von 2 Hunderttern und 6 Tausenden bilden u. s. w. Auf diese Weise fährt man fort, bis zur höchsten Stelle des Multiplicanden. Die Richtigkeit dieses Verfahrens geht aus seiner Erklärung genugsam hervor.

Das willkührliche Zeichen dieser Rechnungsart ist ein liegendes Kreuz $\times$, und es heißt z. B. $874 \times 3 = 2622$ so viel als 874 mit 3 multiplicirt, gibt 2622 zum Producte.

§. 2.

Multiplication mit einer mehrzifferigen Zahl.

Um eine gegebene Zahl mit einem mehrzifferigen Multiplicator z. B. 74385 mit 634 zu multipliciren, bemerke man nur, daß dieses so viel heißt, als jene Zahl 634 mal größer machen, welches geschehen wird, wenn man dieselbe zuerst 4 mal, dann 30 mal, dann 600 mal vergrößert und nun ihr Vierfaches zum Dreyßigfachen und zum Sechshundertfachen addirt, woraus offenbar ihr Sechshundert vier und dreyßigfaches, d. h. das verlangte Product entstehen muß. Dieses gibt Folgendes:

74385 Multiplicand
634 Multiplicator

297540 Das Vierfache des Multiplicanden.
223155 Das Dreyßigfache des Multiplicanden.
446310 Das Sechshundertfache des Multiplicanden.

47160090 Das 634 fache des Multiplicanden.

Sollte man z. B. 864923 mit 8004 multipliciren, so wäre die Rechnung diese:

864923 Multiplicand.
8004 Multiplicator.

3459692 Das 4 fache des Multiplicanden.
6919384 Das 8000 fache des Multiplicanden.

6922843692 Das 8004 fache des Multiplicanden.

§. 3.

Multiplication der Factoren mit Nullen.

I. Wenn man an eine gegebene Zahl z. B. an 548 zur Rechten eine Nulle setzt, so ist sie durch diese angehängte Nulle 10 mal größer, oder mit 10 multiplicirt worden. Denn die Ziffer 8, welche vorhin Einer bedeutete, drückt nun Zehner aus; die 4, welche vorhin Zehner waren, sind nun Hundertte, und aus den vorigen 5 Hundertten, sind nun 5 Tausende geworden. Daher ist jede einzelne Ordnung der zuerst gegebenen Zahl 10 mal größer geworden, folglich die Zahl selbst.

Hieraus entsteht die Regel: Wenn man irgend eine Zahl mit 10, 100, 1000, 10000 u. s. f. multiplici-ren soll, so hänge man ihr zur Rechten 1, 2, 3, 4 u. s. f. Nullen an. Oder:

$$7326 \times 100 = 732600$$
$$8297 \times 1000 = 8297000$$
$$485 \times 100000 = 48500000 \text{ u. s. f.}$$

II. Soll nun irgend eine Zahl, z. B. mit 40 multiplicirt werden, so heißt dieses so viel, als jene Zahl 40 mal, d. h. 4 mal 10 mal größer machen. Daher multiplicire man sie erst mit 4 und hänge dann zur Rechten des Products eine Nulle an. Z. B.

68253 Multiplicand.
40 Multiplicator.

2730120 Product.

Befänden sich mehrere Nullen an den Ziffern des Multiplicators, so müßte man eben so viele Nullen an das mit jenen Ziffern gebildete Product hängen.

Wenn beyde Factoren zur Rechten mit Nullen versehen sind, so folgt aus dem Bisherigen, daß nur die Ziffer mit den Ziffern multiplicirt, und zur Rechten des Products die sämmtlichen Nullen beyder Factoren angehängt werden z. B.

4876000 Multiplicand.
800 Multiplicator.

3900800000 Product.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Was ist das Einmaleins, wie wird es gebildet und wozu dient dasselbe? Wie wird eine gegebene Zahl mit einer Ziffer multiplicirt? Was ist das willkührliche Zeichen der Multiplication? (§. 1.)

II. Wie multiplicirt man eine gegebene Zahl mit einem mehrzifferigen Multiplicator? Worauf beruht die Richtigkeit dieser Auflösung? (§. 2.)

III. Wie wird eine gegebene Zahl mit 10, 100, 1000 u. s. f. multiplicirt? Wie verfährt man, wenn sich an dem einen Factor mehrere Nullen befinden? Und wie, wenn beyde Factoren Nullen haben? (§. 3.)

IV. Lehrübung.

Gründe und Ausführung der Subtraction.

§. 1.

Subtraction in einfachern Fällen.

I. Wenn man z. B. die Zahl 43152 von der größern Zahl 98376 abziehen soll, so wird dieses dadurch an-

gedeutet, daß man die größere Zahl zuerst, dann einen wagrechten Querstrich —, welchen man durch weniger ausspricht, und hierauf die kleinere Zahl setzt; nämlich 98376—43152. Um nun die richtige Differenz dieser Zahlen zu finden, bemerke man, daß nur Gleichartiges von Gleichartigem hinweggenommen werden kann. Daher müssen auch beyde Zahlen mit ihren gleichartigen Ordnungen unter einander gestellt werden. Nämlich:

98376 größere Zahl
43152 kleinere Zahl
55224 Differenz oder Rest.

Dieser Rest wurde dadurch erhalten, daß man die 2 Einer von den 6 Einern, die 5 Zehner von den 7 Zehnern, den 1 Hundertter von den 3 Hunderttern, u. s. f. jede höhere Ordnung von der ihr gleichartigen hinwegnahm, was auch jedesmal geradezu geschehen konnte, da die abzuziehende Ziffer kleiner, als jene war, wovon der Abzug geschehen sollte. Da nun der Unterschied aller einzelnen Theile zweyer Ganzen dem Unterschiede dieser Ganzen selbst gleich seyn muß, so ist die gefundene Differenz die richtige.

II. Auf ähnliche Art verhält es sich auch in folgendem Beyspiele:

7389465 größere Zahl
17142 kleinere Zahl
7372323 Differenz oder Rest.

Hier wurden die beyden höchsten Ordnungen der größern Zahl (3 und 7) unverändert in die Differenz gesetzt, weil von diesen beyden Ordnungen nichts abgezogen werden sollte.

§. 2.

Subtraction in zusammengesetztern Fällen.

I. Soll nun z. B. von der größern Zahl 842314 die kleinere 297826 abgezogen werden, so sieht man wohl, daß jede Ziffer der kleinern Zahl größer ist, als die ihr gleichartige Ziffer in der größern Zahl; mit Ausnahme der Ziffer der höchsten Ordnungen in beyden Zahlen. Obwohl nun eine größere Ziffer von der kleinern nicht unmittelbar weggenommen werden kann, so wird sich dieses doch dadurch ausführen lassen, daß man eine Einheit in der nächst höhern Ordnung der größern Zahl borget, dieselbe als 10 zu der nächst niedrigern zählt, wodurch der Abzug immer geschehen kann. Obiges Beyspiel gibt daher diese Rechnung:

842314 größere Zahl
297826 kleinere Zahl

544488 Rest.

Da man 6 Einer von 4 Einern nicht wegnehmen kann, so borge man einen Zehner (welches über der Ziffer des Zehner mit einem Pünctchen bemerkt wird) welcher in der Stelle der Einer 10 gilt und mit den vorhandenen 4 Einern eine Summe von 14 bildet, wovon die 6 abgezogen, noch 8 Einer übrig lassen, welche in die Stelle der Einer gesetzt werden. Da nun 2 Zehner von keinem Zehner sollen weggenommen werden, so borge man einen Hundertten, welcher zehn Zehner gilt, wovon 2 Zehner abgezogen, noch 8 übrig lassen, welche an ihre gehörige Stelle kommen. Nun sollen 8 Hunderte von 2 Hunderten hinweggenommen werden, was an sich unmöglich ist. Borgt man

aber einen Tausenden, welcher 10 Hunderte und, mit den 2 noch vorhandenen, 12 Hunderte gibt, so können die 8 Hunderte davon abgezogen werden, wodurch 4 Hunderte übrig bleiben, welche man in die Stelle der Hunderte setzt. Auf ähnliche Art fährt man bis zu den höchsten Ordnungen der beyden Zahlen fort.

II. Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt theils aus dem im vorigen §. Bemerkten, theils aus dem einfachen, leicht erklärbaren Kunstgriffe des Borgens.

Folgendes Beyspiel verdient hier noch eine Erläuterung:

820003 größere Zahl
96427 kleinere Zahl
723576 Rest.

Hier mußte bey der Ziffer 2 ein Zehntausender geborgt werden. Da nun $10000 = 9000 + 900 + 90 + 10$ ist, so sieht man, warum in der größern Zahl an die Stelle der drey Nullen nunmehr drey Neuner kommen, und warum zu den 3 Einern nun noch 1 Zehner kömmt. Daher entsteht die Regel: Alle Nullen, welche man bey dem Borgen überspringet, werden zu 9.

§. 3.

Probe der Subtraction.

I. Die so genannte Probe, welche man über die Subtraction anstellen kann, beruht darauf, daß die kleinere Zahl, zu dem Reste addirt, in der Summe wieder die größere Zahl hervorbringen muß z. B.

7438259 größere Zahl
4169487 kleinere Zahl
3268772 Rest.
4169487 kleinere Zahl } addirt
7438259 Summe, oder größere Zahl.

II. Auch könnte die Richtigkeit des gefundenen Restes dadurch geprüft werden, daß man den Rest von der größern Zahl subtrahirte, wodurch die kleinere Zahl als Differenz übrig bleiben müßte. Dieses gäbe in vorigem Beyspiele Folgendes:

7438259 größere Zahl
3268772 voriger Rest
4169487 Differenz, oder vorige kleinere Zahl.

In den bisherigen Subtractionsfällen wurde immer eine kleinere Zahl von einer größern hinweggenommen. Die Frage: Ob und wie es möglich sey, eine größere Zahl von einer kleinern wegzunehmen, gehört noch nicht hierher, sondern wird weiter Unten beantwortet werden.

§. 4.

Übungs-Fragen.

I. Wie müssen die Posten bey der Subtraction unter einander gesetzt werden? Wie geschieht die Subtration, wenn jede Ziffer der kleinern Zahl kleiner ist, als jede gleichartige in der größern Zahl? (§. 1.)

II. Wie verfährt man, wenn größere Ziffer von kleinern sollen abgezogen werden? Wie verfährt man, wenn über Nullen geborgt wird? (§. 2.)

III. Auf welche Art wird die Probe über die Subtraction gemacht? Worauf beruht die Richtigkeit dieser Probe? (§. 3).

V. Lehrübung.

Gründe und Ausführung der Division.

§. 1.

Division durch eine Ziffer.

I. Da die Division eigentlich nichts anderst, als eine Subtraction ist, bey welcher eine kleinere Zahl von einer größern so oft hinweggenommen wird, als es möglich ist, so könnte die Division auch durch Hülfe der gewöhnlichen Subtraction ausgeführt werden. Indessen würde dieses Verfahren in vielen Fällen höchst langweilig seyn. Denn um z. B. 3485 durch 5 zu dividiren, müßte man den Divisor 5 gerade 697 mal hinter einander von jener Zahl wegnehmen, was hier schon sehr unbequem wäre, obwohl der Dividend eben noch keine sehr große Zahl ist. Daher hat man die weit kürzere Division erfunden, deren Methode und Grund am Bequemsten in einem Beyspiele entwickelt wird.

II. Es sey z. B. 8795 durch 5 zu dividiren, so heißt dieses so viel, als bestimmen, wie oft man 5 von dieser Zahl abziehen könne. Da aber $8795 = 8000 + 700 + 90 + 5$ ist, so wird man einfacher bestimmen, wie oft der Divisor 5 von 8000 und von 700 und von 90 und von 5 weggenommen werden kann. Denn da 5 von 8 nur 1 mal kann weggenommen werden, so muß 5 von 8000 auch 1000 mal weggenommen werden können. Nimmt man aber die 5 gerade 1000 mal weg, so werden 5000 weggenommen, welche von den gegebenen 8000 abgezogen, noch 3000 übrig lassen, von

welchen man die 5 nicht mehr nach Tausenden hin, wegnehmen kann. Da aber noch 700 gegeben sind, so bildet dieses zusammen 3700 d. h. 37 Hunderte, worin die 5 nunmehr 700 mal enthalten ist. Nimmt man diese 5 jetzt 700 mal weg, so nimmt man 35 Hunderte weg, welche noch 200 zum Reste geben, worin die 5 nicht mehr nach Hunderten enthalten ist. Setzt man die im Dividenden gegebenen 90 dazu, so entsteht zur Summe 290 d. h. 29 Zehner, von welchen die 5 wieder 50 mal weggenommen werden kann. Nimmt man aber die 5 wirklich 50 mal weg, so werden 250 weggenommen, welche, von 290 abgezogen, noch 40 übrig lassen, worin die 5 nicht mehr nach Zehnern enthalten ist. Setzt man aber die noch vorhandenen 5 Einer dazu, so ist 5 in diesen 45 gerade 9 mal enthalten, da 5 mal 9 so viel, als 45 ist. Hieraus folget, daß die 5 von 8795 zuerst 1000 mal, dann 700 mal, dann 50 mal, dann 9 mal, folglich zusammen genau 1759 mal abgezogen werden konnte. Folglich wird 1759 der gesuchte Quotient seyn.

Zur bequemen Uebersicht dieser Auseinandersetzung dient folgende Zusammenstellung:

Divisor	Dividend	Quotient
5	8795	1759
5	8000	1000 I. Theil des Quotienten
	5000	
addirt	3000	1ter Rest
	700	II. Theil des Dividenden
5	3700	700 II. Theil des Quotienten
	3500	
addirt	200	2ter Rest
	90	III. Theil des Dividenden
5	290	50 III. Theil des Quotienten
	250	
addirt	40	3ter Rest
	5	IV. Theil des Dividenden
5	45	9 IV. Theil des Quotienten
	45	

Ohne Rest.

Daher ist 5 in 8795 überhaupt 1000 + 700 + 50 + 9 mal d. h. 1759 mal enthalten.

Aus dieser Darstellung erkennt man auch den Grund dessen, daß die Division nicht, wie die drey frühern Rechnungsarten in den niedrigsten Stellen, sondern in der höchsten Ordnung begonnen wird, da die Reste, welche hier etwa bleiben, sich sehr leicht in die nächst niedrigern Ordnungen verwandeln lassen.

III. Um die Division mit einem einzifferigen Divisor schnell zu vollenden, kann man die einzelnen Producte aus dem Divisor in die gefundenen Theile des Quotienten im Kopfe bilden, und von den gehörigen Stellen

des Dividenden auf gleiche Weise subtrahiren, wie folgendes Beyspiel deutlicher zeigt, in welchem 524604 durch 6 dividirt werden soll. Nämlich

Divisor	Dividend	Quotient.
6	524604	87434

Hier sage man: 6 in 52 ist 8 mal enthalten; 6 mal 8 sind 48, und diese von 52 abgezogen, lassen 4 zum Reste, welche neben die folgende Ziffer des Dividenten gestellt, 44 geben. Da 6 in 44, nun 7 mal enthalten ist, so setze man 7 als zweyten Theil des Quotienten, subtrahire 6 mal 7 oder 42 von diesen 44, wodurch 2 zum Reste bleiben, welche mit der nächsten Ziffer 6 die Zahl 26 bilden, worin der Divisor 6 wieder 4 mal enthalten ist u. s. w. Auf ähnliche Weise fahre man fort, bis zum Schlusse, wobey hier kein Rest übrig bleibt.

§. 2.

Division mit einem mehrzifferigen Divisor.

I. Wenn der Divisor zwey Ziffer enthält, so vergleiche man die beyden höchsten Ordnungen des Dividenden mit ihm. Sind sie ihm gleich, so setzt man 1 in den Quotienten. Ist der Divisor kleiner, so wähle man einstweilen zum Quotienten eine Ziffer, welche nach dem 1mal 1 der Quotient aus der höchsten Ziffer des Divisors in die höchste des Dividenden ist. Mit dieser multiplicire man den ganzen Divisor, so ist, wenn das Product von den zwey höchsten Stellen des Dividenden abgezogen werden kann, der angenommene Quotient richtig. Ist aber dieses Product größer, so

Divisor	Dividend	Quotient
5	8795	1759
5	8000	1000 I. Theil des Quotienten
	5000	
addirt	3000	1ter Rest
	700	II. Theil des Dividenden
5	3700	700 II. Theil des Quotienten
	3500	
addirt	200	2ter Rest
	90	III. Theil des Dividenden
5	290	50 III. Theil des Quotienten
	250	
addirt	40	3ter Rest
	5	IV. Theil des Dividenden
5	45	9 IV. Theil des Quotienten
	45	

Ohne Rest.

Daher ist 5 in 8795 überhaupt 1000 + 700 + 50 + 9 mal d. h. 1759 mal enthalten.

Aus dieser Darstellung erkennt man auch den Grund dessen, daß die Division nicht, wie die drey frühern Rechnungsarten in den niedrigsten Stellen, sondern in der höchsten Ordnung begonnen wird, da die Reste, welche hier etwa bleiben, sich sehr leicht in die nächst niedrigern Ordnungen verwandeln lassen.

III. Um die Division mit einem einzifferigen Divisor schnell zu vollenden, kann man die einzelnen Producte aus dem Divisor in die gefundenen Theile des Quotienten im Kopfe bilden, und von den gehörigen Stellen

des Dividenden auf gleiche Weise subtrahiren, wie folgendes Beyspiel deutlicher zeigt, in welchem 524604 durch 6 dividirt werden soll. Nämlich

Divisor	Dividend	Quotient.
6	524604	87434

Hier sage man: 6 in 52 ist 8 mal enthalten; 6 mal 8 sind 48, und diese von 52 abgezogen, lassen 4 zum Reste, welche neben die folgende Ziffer des Dividenten gestellt, 44 geben. Da 6 in 44, nun 7 mal enthalten ist, so setze man 7 als zweyten Theil des Quotienten, subtrahire 6 mal 7 oder 42 von diesen 44, wodurch 2 zum Reste bleiben, welche mit der nächsten Ziffer 6 die Zahl 26 bilden, worin der Divisor 6 wieder 4 mal enthalten ist u. s. w. Auf ähnliche Weise fahre man fort, bis zum Schlusse, wobey hier kein Rest übrig bleibt.

§. 2.

Division mit einem mehrzifferigen Divisor.

I. Wenn der Divisor zwey Ziffer enthält, so vergleiche man die beyden höchsten Ordnungen des Dividenden mit ihm. Sind sie ihm gleich, so setzt man 1 in den Quotienten. Ist der Divisor kleiner, so wähle man einstweilen zum Quotienten eine Ziffer, welche nach dem 1mal 1 der Quotient aus der höchsten Ziffer des Divisors in die höchste des Dividenden ist. Mit dieser multiplicire man den ganzen Divisor, so ist, wenn das Product von den zwey höchsten Stellen des Dividenden abgezogen werden kann, der angenommene Quotient richtig. Ist aber dieses Product größer, so

muß der Quotient so lange um eine Einheit vermindert werden, bis dieser Abzug geschehen kann. Wäre aber der Divisor größer, als die zwey höchsten Stellen des Dividenden, so nehme man drey Ziffer aus diesem, vergleiche den Divisor damit und bestimme nach dem vorigen den Quotienten. Auf ähnliche Weise werden alle folgenden Ziffer des Quotienten gefunden, wie man aus folgenden Beyspielen deutlich ersehen wird:

1) Divisor	Dividend	Quotient
15	131.2.8.0.	8752

120
112
105
78
75
30
30

Ohne Rest.

Probe.

8752 Quotient
15 Divisor.

43760
8752

Product 131280 oder Dividend.

2) Divisor	Dividend	Quotient
354	1325.8.0.0.8.	37452

1062

2638

2478

1600

1416

1840

1770

708

708

Ohne Rest.

Probe.

37452 Quotient

354 Divisor

149808

187260

112356

13258008 Dividend

II. Wenn der Divisor aus 4, 5, 6, oder noch mehreren Ziffern besteht, so thut man wohl, zuvor ein Täfelchen zu verfertigen, welches alle Mehrfachen dieses Divisors bis einschließlich zum Neunfachen enthält. Dieses gewährt den Vortheil, daß man bey der Bestimmung der einzelnen Ziffer des Quotienten nicht unsicher, sondern mit Bestimmtheit zu Werke geht, wodurch das sonst nicht ungewöhnliche Auslöschen der schon gebildeten Producte vermieden wird. Folgendes Beyspiel erläutert dieses:

Divisor			Dividend	Quotient
1 faches		17283	87429.8.7.6.	5058
2	—	34566	86415	
3	—	51849	101487	
4	—	69132	86415	
5	—	86415	150726	
6	—	103698	138264	
7	—	120981	12462 Rest	
8	—	138264		
9	—	155547		

Probe.

17283 Divisor
5058 Quotient
138264
86415
86415
87417414
12462 Rest
87429876 Summe oder Dividend.

§. 3.

Division in Ziffern, woran sich Nullen befinden.

I. Wenn sich sowohl an dem Divisor, als an dem Dividenden eine Nulle befindet, so kann man diese beyden Nullen gegen einander wegstreichen, ohne daß der Quotient dadurch verändert wird. Denn wenn z. B. 8 Einer in 24 Einern 3 mal enthalten ist, so müßen auch 8 Zehner in 24 Zehnern 3 mal enthalten seyn, d. h. 80 ist in 240, dreymal enthalten. Auf gleiche Weise müssen auch 8 Hundertte in 24 Hundert-

ten 3 mal enthalten seyn, oder 800 ist in 2400 ebenfalls 3 mal enthalten. Derselbige Beweis gilt für jede andere Anzahl von Nullen.

II. Befänden sich an dem Dividenden mehr Nullen, als an dem Divisor, so folgt aus dem eben Bemerkten, daß man die Nullen des letztern gegen eben so viele des erstern hinwegstreichen könne. So ist z. B. 42000:700 (wo die beide Puncte das willkührliche Zeichen der Division bedeuten und der Divisor immer zur Rechten steht) = 420:7 = 60.

III. Befänden sich dagegen nur an dem Divisor, nicht aber an dem Dividenden mehrere Nullen, so schneide man an dem letztern von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffer ab, als der Divisor Nullen hat, dividire nun mit den noch übrig bleibenden Ziffern des Divisors wie gewöhnlich in die noch übrigen Ziffer des Dividenden, und setze die von letzterem abgeschnittenen Ziffer neben den Rest, welcher sich am Ende der Division ergibt; z. B.

Divisor	Dividend.	
12(00	94837(25	7903
	84	
	108	
	108	
	»»37	
	36	
	»1	

zu diesem Reste die abgeschnittenen 25 gesetzt, gibt 125, welche eigentlich noch durch 1200 getheilt werden sollen.

IV. Die Probe über die Division kann (wie schon im vorigen §. ist gezeigt worden), dadurch gemacht werden, daß man den erhaltenen Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, woraus im Producte der Dividend entspringen muß. Auch könnte man wiederum mit dem Quotienten in den Dividenden dividiren, und müßte, zum Resultate den Divisor erhalten. Folgende Beyspiele dienen zur Erläuterung:

Divisor	Dividend	Quotient
463	4298029	9283

4167

1310

926

3842

3704

1389

1389

ohne Rest.

Gewöhnliche Probe.

9283 Quotient
463 Divisor

27849
55698
37132

4298029 Dividend.

Probe durch die Division.

Quotient	Dividend	Divisor
9283	4298029	463
	37132	
	58482	
	55698	
	27849	
	27849	
	ohne Rest.	

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Wie wird eine gegebene Zahl durch eine Ziffer dividirt? Worauf beruht die Richtigkeit dieser Auflösung? Wie wird das Verfahren abgekürzt? (§. 1.).

II. Wie verfährt man bey einem mehrzifferigen Divisor? Wie bey einem vielzifferigen? (§. 2.)

III. Welche Fälle treten ein, wenn sich am Divisor oder Dividenden Nullen befinden? Wie verfährt man in diesem Falle? Wie wird die Probe über die Division durch die Multiplication und wie durch die Division hierbey gemacht? (§. 3.)

Vierter Lehrgang.

Die vier Rechnungsarten in benannten Zahlen.

I. Lehrübung.

Entwicklung nöthiger Vorbegriffe.

§. 1.

I. Der Werth einer Zahl hängt nicht allein von der blosen Menge ihrer Einheiten, sondern auch von der Größe dieser Einheiten ab. Nimmt man die Größe der Einheit als unveränderlich an, so muß z. B. die Zahl 12 immer größer, als die Zahl 7 seyn. Nimmt man aber für die Einheit einer jeden eine verschiedene Größe an, und denkt sich z. B. unter jener Zahl 12 Kreuzer, unter dieser 7 Gulden, so ist diese letztere nun größer, als die erste.

II. Daher nennt man jene Zahlen, bey welchen nicht nur die Menge, sondern auch die Art ihrer Einheiten bestimmt ist, benannte Zahlen und setzt sie den unbenannten oder reinen Zahlen entgegen, bey welchen nur die Mengen ihrer Einheiten gegeben und diese Einheiten selbst als gleich groß angenommen werden. Die Entstehung dieser benannten Zahlen hat in den Bedürfnißen des gemeinen Lebens ihren Grund, wobey willkührlich bestimmte Maase, Gewichte, Geldsorten u. d. gl. vorkommen. Ausserdem trifft man auch benannte Zahlen in manchen Wissenschaften an, wie z. B. in der Astronomie die Eintheilung des Tags in 24 Stunden, einer Stunde in 60 Minuten, einer Minute in 60 Secunden u. s. w.

III. Unter der Reductions-Zahl versteht man jene Zahl, welche andeutet, wie viele Einheiten von der niedrigern Art eine Einheit von der nächst höhern Gattung enthält. So ist z. B. zwischen Gulden und Kreuzern die Reductions-Zahl 60; zwischen Pfunden und Lothen ist sie 32, u. s. w.

§. 2.

Tabelle über einige, gewöhnlich vorkommende benannte Zahlen.

Will man in benannten Zahlen rechnen, so muß man vor allem die verschiedenen Reductions-Zahlen kennen, welche bey ihnen Statt finden. Nachstehende kleine Tabelle enthält einige der gewöhnlichsten, zur Uebung in den untenfolgenden vier Rechnungsarten.

I. Gemeines Gewicht.

Ein Centner hat	100 Pfunde.
Ein Pfund	32 Lothe.
Ein Loth	4 Quentchen.

II. Deutsches Apothekergewicht.

Ein Pfund ℔ hat	12 Unzen (24 Lothe).
Eine Unze ℥	8 Drachmen.
Ein Drachma ʒ	3 Scrupel.
Ein Scrupel ℈	20 Gran.

III. Geldsorten.

Ein neue Louisd'or enthält	11 Gulden.
Ein Gulden	60 Kreuzer.
Ein Kreuzer	4 Pfennige.

IV. Zeiteintheilung.

Ein Jahr besteht aus	12 Monaten.
Ein Monat . . .	28, 29, 30 oder 31 Tagen.
Ein Tag	24 Stunden.
Eine Stunde	60 Minuten.
Eine Minute	60 Secunden.
Eine Secunde	60 Tertien.

V. Gemeines Längenmaas.

Eine deutsche Meile hat . .	24,000 rhein. Schuh.
Ein rhein. Schuh	12 Zoll.
Ein Zoll	12 Linien.

VI. Papiermaas.

Ein Ballen hat	10 Ries.
Ein Ries	20 Buch.
Ein Buch (Schreibp.)	24 Bogen.
Ein Buch (Druckp.)	25 Bogen.

§. 3.

Einfache Reductions-Beyspiele.

Alle Reductions-Fälle in benannten Zahlen sind von doppelter Art. Entweder sollen höhere Wertharten in niedrige, oder geringere Wertharten in höhere verwandelt werden. Zur Erläuterung dienen folgende Beyspiele:

I. Wie viele Kreuzer sind 68 Gulden?

Hier sind 68 fl. = 68 × 60 kr. = 4080 Kr.

Wie viel Pfennige sind 4080 Kreuzer?

Hier sind 4080 kr. = 4080 × 4 = 16320 Pf.

Wie viel Lothe sind 56 Pfunde?

Hier sind 56 Pf. = 56 × 32 = 1792 Lothe.

Wie viel Quentchen sind 1792 Lothe?

Hier sind 1792 Lothe = 1792 × 4 = 7168 Quent.

II. Fragte man nun, wie viele Gulden sind 685 kr.? so sind 685 kr. = 685 : 60 = 11 fl. 25 kr.

Wie viele Kreuzer sind 3748 Pfennige?

Hier sind 3748 Pf. = 3748 : 4 = 937 Kreuzer.

Wie viele Gulden sind diese 937 Kreuzer?

Hier sind 937 kr. = 937 : 60 = 15 fl. 37. kr.

Wie viele Pfunde sind 874 Lothe?

Hier sind 874 Lothe = 874 : 32 = 27 Pf. 10 Lth.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Wovon hängt der Werth einer gegebenen Zahl ab? Was sind benannte Zahlen, was sind unbenannte oder reine Zahlen? Was ist die Reductions-Zahl? (§. 1.).

II. Wie viele Kreuzer sind 378 Gulden?

Wie viele Lothe sind 470 Pfunde?

Wie viele Buch sind 18 Ballen?

Wie viele Stunden sind 25 Tage?

Wie viele Quentchen sind 86 Pfunde?

Wie viele Pfennige sind 48 Gulden?

Wie viele Bogen sind 3 Ballen Schreibp.? (§. 3.).

II. Lehrübung.

Addition und Multiplication in benannten Zahlen.

§. 1.

Benannte Zahlen zu addiren.

I. Sollen benannte Zahlen addirt werden, so setzt man sie zuerst, nach dem Gesetze der Gleichartigkeit, so unter einander, daß die Einer unter Einern, die Zehner unter Zehnern, u. s. f. stehen. Werden nun alle Zahlen der niedrigsten Werthart addirt, so ist ihre Summe entweder kleiner, als eine Einheit der nächst höhern Werthart, oder nicht. Im ersten Falle schreibt man diese Summe unverändert an die gehörige Stelle; im zweyten aber dividirt man mit der Reductionszahl hinein, setzt den etwaigen Rest, oder, wenn keiner bleibt, eine Nulle an die gehörige Stelle, und behält den Quotienten im Sinne. Nun addirt man diesen Quotienten und alle mit ihm gleichartige Zahlen der nächst höhern Werthart zusammen, dividirt in diese Summe mit der gehörigen Reductionszahl, und setzt dieses Verfahren so lange fort, bis man zum höchsten Werthe gekommen ist, wo denn die erhaltene Summe ohne fernere Reduction hingeschrieben wird, wie nachstehende Beyspiele erläutern werden.

II. Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht theils auf den allgemeinen Lehren der Addition überhaupt, theils aber auf den bisherigen Begriffen von den benannten Zahlen.

	Centner	Pfunde	Lothe	Quentchen
zu addir. Zahlen	374	86	12	3
	2762	53	28	2
	56	47	21	3
	174	75	19	2
Summe	3368	63	18	2

	Louisd'or	Guld.	Kreuzer	Pfennige
zu addir. Zahlen	84	9	53	2
	12	10	49	3
	7	6	38	1
	5	7	41	3
Summe	111	2	1	1

	Tage	Stunden	Minut.	Secund.
zu addir. Zahl.	13	16	48	15
	8	21	37	20
	3	20	28	32
	5	19	56	45
Summe	32	6	50	52

Zur Uebung im Rechnen kann man alle höhere Werthe in die niedrigsten verwandeln, nun die Addition verrichten und dann wieder die Summe gehörig reduciren.

§. 2.

Besondere Anwendungen dieser Addition.

Die Addition in benannten Zahlen hat in manchen Fällen des bürgerlichen Lebens noch besondere Anwendungen, welche in folgenden Beyspielen sollen erläutert werden.

I. Der König von Schweden, Gustav Adolph, war am 9ten December des Jahrs 1794 geboren und

wurde 37 Jahre, 10 Monate und 28 Tage alt. Wann ist er gestorben?

Hieraus ist offenbar, daß der Tag des Absterbens gefunden wird, wenn man zu dem Datum seiner Geburt das von ihm erreichte Lebensalter addirt. Dieses gibt

Jahre	Monate	Tage	
1593	11	8	
37	10	28	
1630	21	36.	Summe.

Will man diese Summe durch den gehörigen Datum des Calenders ausdrücken, so ist vor allem zu bedenken, daß 21 Monate so viel als 1 Jahr und 9 Monate betragen. Daher ist Gustav Adolph im Jahre 1631 nach 9 Monaten und 36 Tagen gestorben. Nun ist aber der 9te Monat der September, und der October hat 31 Tage. Daher ist er nach 9 Monaten und 31 + 5 Tagen d. h. am 5ten November des Jahrs 1632 gestorben, weil die 10 Monate und 5 Tage nach dem Jahre 1631 und folglich in das Jahr 1632 fallen.

II. Es wurde am 11ten Januar des Jahres 1782 eine Geldsumme geliehen, welche nach 3 Jahren, 4 Monaten und 24 Tagen wieder zurückbezahlt worden ist. Auf welchen Datum wurde diese Rückzahlung geleistet?

Hier müßen ebenfalls die beyden angegebenen Zeiten zusammen addirt werden, welches folgende Rechnung gibt:

Jahre	Monate	Tage	
1781	0	10	
3	4	24	
1784	4	34.	Summe.

Daher wurde die Zahlung nach dem Jahre 1784, nach dem 4ten Monate (d. h. nach dem April) nach 34 Tagen; folglich, da der Mai 31 Tage hat, nach dem 3ten Junius und somit am 4ten Junius des Jahrs 1785 geleistet.

§. 3.

Multiplication in benannten Zahlen.

I. Wenn eine benannte Zahl multiplicirt werden soll, so ist vor allem zu bemerken, daß der andere Factor nicht auch eine benannte Zahl seyn kann, denn die Aufgabe 6 fl. mit 3 fl. zu multipliciren, würde soviel heißen, als jene 6 fl. sollten 3 fl. mal genommen werden, was offenbar keinen verständigen Sinn hat. Daher muß bey der Multiplication in benannten Zahlen der Multiplicator jederzeit eine reine Zahl seyn.

II. Sollte man z. B. 4628 fl. 15 kr. 3 pf. mit 12 multipliciren, so wäre dieses soviel, als jene Zahl 12 mal größer machen, was gewiß geschehen wird, wenn man jede ihrer Wertharten 12 mal größer macht. Man multiplicire daher die gegebenen 3 pf. mit 12, dividire das Product 36 durch 4, wodurch man 9 kr. zum Quotienten und keinen Rest von Pfennigen erhält, welches man durch eine in die Stelle der Pfennige gesetzte Nulle andeutet. Multiplicirt man nun die gegebenen 15 kr. mit 12 so erhält man 180 kr., wozu die aus den Pfennigen entstandenen 9 kr. addirt, eine Summe von 189 kr. geben, worin sich, wenn man mit 60 dividirt, 3 fl. und 9 kr. befinden, welche letztere man an ihre gehörige Stelle schreibt. Multiplicirt

man nun die 4628 fl. mit 12, so bekömmt man 55536 fl., wozu die aus den Kreuzern erhaltenen 3 Gulden addirt, eine Summe von 55539 fl. geben. Das Product ist daher 55539 fl. 9 kr. 0 pf. Die Rechnung ist diese:

fl.	kr.	pf.	
4628	15	3	
		12	
55539	9	0	

III. Sollte man z. B. die Zahl von 783 Cent. 56 Pf. 18 Loth. und 2 Q. mit 43 multipliciren, so gäbe dieses, nach Anleitung der vorigen Rechnung, Folgendes:

Cent.	Pf.	Loth	Q.	
783	56	18	2	Multiplicand
			43	Multiplicator
33693	32	27	2	Product.

Zur Uebung könnte man diese Multiplications-Beyspiele auch dadurch auflösen, daß alle benannte Zahlen des Multiplicanden auf Zahlen der niedrigsten Werthart reducirt, nunmehr mit dem Multiplicator multiplicirt und sodann wiederum durch gehörige Division in höhere Wertharten verwandelt würden. Obwohl dieses Verfahren weitläufiger, als das vorige ist, so kann es den Anfängern als Rechnungsübung empfohlen werden.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Wie werden mehrere benannte Zahlen zusammen addirt? Worauf beruht die Richtigkeit dieses Verfahrens? Welche Rechnungs-Uebung läßt sich dabey anbringen? (§. 1.).

II. Welche besondere Anwendungen lassen sich von dieser Addition machen? Wann ist Einer gestorben, welcher am 8ten December 1792 geboren und 32 Jahre 5 Monate 6 Tage alt wurde? (§. 2.).

III. Wie muß bey der Multiplication in benannten Zahlen der eine Factor immer beschaffen seyn? Wie wird die Multiplication ausgeführt? Was ist 375 fl. 36 kr. 3. pf. × 24? (§. 3.).

III. Lehrübung.

Subtraction und Division in benannten Zahlen.

§. 1.

Benannte Zahlen zu subtrahiren.

I. Da man nur Gleichartiges von Gleichartigem abziehen kann, so müssen die gegebenen benannten Zahlen so unter einander gestellt werden, daß sie diesem Gesetze entsprechen. Träfe sich's nun, daß jede Werthart in der abzuziehenden Zahl kleiner wäre, als die ihr gleichartige in der größern ist, so darf man jene kleinere Zahlen nur von dieser größern hinwegnehmen, und die Reste an die gehörigen Stellen schreiben, um die Subtraction auszuführen. Dieses zeigt folgendes

Beyspiel:

fl.	kr.	pf.	
8749	48	3	größere Zahl
3978	39	1	kleinere Zahl
4771	9	2	Rest.

II. Wäre dieses aber nicht der Fall, so muß man auch hier bey der nächsthöhern Einheit borgen, dieselbe durch die Reductionszahl in Einheiten der nächst niedrigern Art verwandeln, die vorhandenen gleichartigen dazu addiren und nun die gegebenen davon abziehen z. B.

fl.	kr.	pf.	
6382	12	1	größere Zahl
3591	52	3	kleinere Zahl
2790	19	2	Rest.

Da man von 1 pf. keine 3 wegnehmen kann, so borgt man 1 kr., welcher 4 pf. gilt und mit dem vorhandenen 1 pf. eine Summe von 5 pf. bildet, wovon, 3 weggenommen, noch 2 übrig bleiben, welche sich in der Stelle der Pfennige befinden. Da man nun von 11 kr. die 52 kr. abziehen soll, so muß 1 fl. gelehnt und zu Kreuzer gemacht werden. Daher bekömmt man 60 + 11 d. h. 71 kr., von welchen, 52 hinweggenommen, noch 19 übrig lassen, welche man in die gehörige Stelle setzt. Die noch vorhandenen Gulden werden nun wie gewöhnlich abgezogen. Noch kann folgendes Beyspiel zur Erläuterung dienen:

	Cent.	Pf.	Loth	D.	
Posten	384	16	12	1	gr. Zahl
	198	74	25	3	kl. Z.
addirt	185	41	18	2	Rest
	198	74	25	3	kl. Z.
Summe als Probe	384	16	12	1	

§. 2.

Besondere Anwendungen der Subtraction.

Auch die Subtraction in benannten Zahlen kann in mehreren Fällen des bürgerlichen Lebens besondere Anwendungen finden, wie nachstehende zwey Beyspiele erläutern:

I. Es wurde Jemand im Jahre 1701 am 8. Februar morgens um 7 Uhr geboren, und ist im Jahr 1770 am 11. März des Abends 8 Uhr gestorben. Wie alt ist der Verstorbene gewesen?

Da es hier darauf ankömmt, den Datum der Geburt von jenem des Absterbens zu subtrahiren, so ist die Rechnung diese:

Jahre	Monate	Tage	Stunden	
1769	2	10	20	Datum des Absterb.
1700	1	7	7	Datum der Geburt
69	1	3	13	Rest.

Der Verstorbene hat daher 69 Jahre, 1 Monat, 3 Tage und 13 Stunden erlebt.

Es kam in diesem Beyspiele vorzüglich darauf an, sowohl den Datum der Geburt, als jenen des Absterbens in den ihnen entsprechenden Jahren, Monaten, Tagen und Stunden auszudrücken. Daß dieses richtig geschehen ist, wird man nach einigem Nachdenken leicht finden.

II. Es hat Jemand am 11. Januar des Jahrs 1782 eine Summe Geldes geliehen, und dieselbe am 4. Junius des Jahrs 1785 wieder zurück bezahlt. Wie lange ist er im Besitze dieser Summe gewesen?

Man sieht sogleich, daß auch hier wieder der frü-

here Datum vom spätern abgezogen werden muß, um die verlangte Zeit zu finden. Dieses gibt folgende Stellung:

Jahre	Monate	Tage	
1784	5	3	größere Zahl
1781	0	10	kleinere Zahl
3	4	24	Rest.

Da man hier 10 Tage von 3 Tagen abziehen soll, so müssen vom 5ten Monate d. h. vom Mai, welcher 31 Tage hat, diese 31 Tage geborgt werden, welche mit den vorhandenen 3 Tagen zur Summe 34 Tage geben, von welcher, nachdem man 10 Tage weggenommen hat, noch 24 Tage übrig bleiben. Daher ist das geliehene Geld während 3 Jahren, 4 Monaten und 24 Tagen benützt worden.

Es ist eine lehrreiche Uebung, sowohl diese Subtractions- als auch die frühern Additions-Aufgaben in solche Fragen einzukleiden, wie sie der jedesmal anzustellenden Proberechnung entsprächen.

§. 3.

Division in benannten Zahlen.

I. Bey der Division in benannten Zahlen haben zwey Hauptfälle Statt, je nachdem entweder eine benannte Zahl durch eine reine, oder eine benannte durch eine ihr gleichartige benannte dividirt werden soll. Im ersten Falle dividire man mit dem gegebenen Divisor in die höchste Werthart des Dividenden, setze den Quotienten neben einen Absönderungsstrich, verwandle den gebliebenen Rest, durch Multiplication

mit der Reductionszahl in Einheiten der nächst niedrigern Werthart, zähle die vorhandenen gleichartigen dazu, dividire diese Summe wiederum mit dem Divisor, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man zur niedrigsten Stelle gekommen ist.

II. Der Grund dieses Verfahrens ist aus dem Bisherigen offenbar, und folgende Beyspiele werden dasselbe noch mehr erläutern:

Divisor | Dividend

12 | 387 Gulden 57 Kreuzer 3 Pfennige)

12 | 387 (32 Quot. aus den Gulden.

36

27

24

3 Rest von Gulden.

60

180 in Kreuzer verwandelt.

57 die gegeb. Kreuzer addirt.

12 | 237 (19 Quot. aus den Kreuzern.

12

117

108

9 Rest von Kreuzern.

4 in Pfennige verwandelt.

36

3 die gegeb. Pfennige addirt.

12 | 39 (3 Quot. aus den Pfennigen.

36

3 Rest von Pfennigen, welcher noch in 12 gleich getheilt werden soll und soviel als 1/4 Pf. ist. Daher ist der ganze Quotient: 32 Gulden, 19 Kr. 3 1/4 Pfennig.

Probe.

Factoren { 32 Guld. 19 Kr. 3 1/4 Pf Multiplicand.
12 Multiplicator.

387 Guld. 57 Kr. 3 Pf.

Auch könnte man hier alle höhere Wertharten zuerst in die niedrigste verwandeln, diese letztere durch 12 dividiren und den Quotienten wiederum rückwärts reduciren.

III. Was ist der 16te Theil von 4389 Centner 85 Pf. 18 Loth und 2 Quentchen.

Divisor | Dividend
16 | 4389 Cent. 85 Pf. 18 Loth 2 Quent.
16 | 4389 (274 Quot. aus dem Cent.
32
118
112
69
64
5 Rest vom Zentnern
100
500 in Pfunde verwandelt
85 die gegeb. Pfunde addirt.
16 | 585 (36 Quot. aus Pfund.
48
105
96
9 Rest aus Pfunden.
32
288 in Lothe verwandelt.
18 die gegeb. Lothe addirt.
16 | 306 (19 Quot. aus den Lothen.
16
146
144
2 Rest von Lothen.
4
8 in Quentchen verwandelt.
2 die gegeb. Quent. addirt.
16 | 10 (dieser Quotient ist weniger, als

ein Quentchen, weil nur 10 Quentchen unter 16 zu vertheilen sind.

Auch hier kann ein ähnliche Probe-Rechnung, wie vorhin, geführt werden.

IV. Wenn benannte Zahlen durch benannte dividirt werden sollen, so müssen sie gleichartig seyn, da nur Gleichartiges in Gleichartigem enthalten ist. Sind nun solche Zahlen gegeben, so dividire man mit der kleinern in die größere wie gewöhnlich und der Quotient ist immer eine reine Zahl.

So sind z. B. 7 Gulden in 63 Gulden 9mal; 15 Pf. in 60 Pf. 4mal; 12 Fuß in 1728 Fußen 144mal enthalten.

Aber wie oft sind 3 Loth in 18 Pfunden enthalten? Hier sind 18 Pf. = 18 × 32 = 576 Lothe, in welchen 3 Lothe gerade 192mal enthalten sind.

Wievielmal größer sind 46 fl. 48 kr. als 5 fl. 12 kr.? Hier sage man: 5 fl. 12 kr. = 5 × 60 + 12 = 312 kr. und 46 fl. 48 kr. = 46 × 60 + 48 = 2808 kr. Da nun 312 in 2808 gerade 9mal enthalten ist, so müssen 46 fl. 48 kr. gerade 9mal größer, als 5 fl. 12 kr. seyn.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Welche Fälle kommen bey der Subtraction in benannten Zahlen vor? Wie werden sie aufgelöset? Wie stellt man die Probe (§. 1.).

II. Wie findet die Subtraction in benannten Zahlen noch eine besondere Anwendung? — Wie alt ist einer geworden, welcher im Jahr 1790 am 12. März des Morgens um 4 Uhr geboren wurde und am 23. September d. J. 1820 Abends um 7 Uhr verstorben ist? (§. 2.).

III. Welche Fälle treten bey der Division in benannten Zahlen ein? Wie verfährt man bey der Division einer benannten Zahl durch eine unbenannte? Wie macht man die Probe? Wie werden benannte Zahlen durch benannte dividirt? Was ist der 15te Theil von 860 Pf. 48 Loth und 3 Quent.? — Wie oft sind 8 fl. 12 kr. in 375 fl. 38 kr. enthalten. (§. 3.)

Fünfter Lehrgang.

Die vier Grundrechnungen in Decimalbrüchen.

I. Lehrübung.

Vorbegriffe und Vordersätze.

§. 1.

Entstehung der Decimalbrüche.

I. Aus dem Bisherigen ist bekannt, daß unser Zahlensystem auf den beyden willkührlichen Sätzen beruhe: 1) immer auf 10 zu zählen und so zu den zehnfach höhern Ordnungen aufzusteigen; 2) jeder Ziffer, welche einer andern unmittelbar zur Linken steht, vermöge ihrer Stelle, einen zehnfach höhern Werth zu ertheilen.

Hieraus folgt nun, daß jede Ziffer, welche sich einer andern unmittelbar zur Rechten befindet, vermöge dieser Stelle, einen zehnmal geringern Werth habe. Daher ist z. B. 1 Tausendter so viel als 10 Hundertter; 1 Hundertter so viel als 10 Zehner, und

1 Zehner so viel als 10 Einer. Setzte man nun zur Rechten dieser Einer noch eine Ziffer und folgte dem nämlichen Gesetze, so müßte die Stelle, worin sie steht, ebenfalls 10mal kleiner, als die Stelle der Einer seyn. Was aber 10mal kleiner als 1 ist, ist so viel als der 10te Theil von 1, welchen man Zehntel nennt. Daher wird diese Stelle die Ordnung der Zehntel heißen, und wenn in ihr z. B. die Ziffer 6 stände, so würde sie 6 Zehntel bedeuten.

Befände sich neben diesen Zehntel zur Rechten z. B. die Ziffer 4, so würde sie in einer Stelle stehen, welche 10mal kleiner, als jene der Zehntel ist. Da nun der zehnte Theil von einem Zehntel so viel als 1 Hunderttel vom Ganzen ist, so müssen diese 4, so viel als 4 Hunderttel bedeuten.

II. Hieraus ist klar, wie die fernern, immer 10mal kleiner werdenden Stellen entstehen, welche man mit den Worten: Tausendtel, Zehntausendtel, Hunderttausendtel, Milliontel u. s. f. bezeichnet.

Nun ergibt sich die Entstehung jener Zahlen, welche man Decimalbrüche nennt. Man erhält sie dadurch, das die Einheit in 10, 100, 1000, 10000 u. s. f. gleiche Theile getheilt wird. Sie werden Brüche genennt, weil sie aus einem in gleiche Theile getheilten Ganzen entspringen; Decimalbrüche aber, weil sie nach dem nämlichen zehntheiligen Gesetze entstehen nach welchem die ganzen Zahlen höherer Ordnungen gebildet werden.

§. 2.

Bezeichnung und Arten der Decimalbrüche.

I. Die Decimalbrüche werden am Einfachsten dadurch bezeichnet, daß man mehrere Ziffer neben einander setzt und, durch ein beygefügtes Comma, jene von ihnen bestimmt, welche die Einer von den Zehntel trennt; z. B.

2	4	5	8	7	4	6,	2	3	5	8	9	1
Millionen	Hunderttausende	Zehntausende	Tausende	Hunderte	Zehner	Einer	Zehntel	Hundertel	Tausendtel	Zehntausendtel	Hunderttausendtel	Milliontel

Hieraus sieht man, daß die Einer den Anfangspunct zweyer Reihen bilden, von welchen die eine nach den zehnfach höhern Ordnungen; die andere aber nach den zehnfach kleinern sich ins Unendliche fort erstreckt. Zur Linken der Einer befinden sich die zehntheiligen ganzen Zahlen und zu ihrer Rechten die zehntheiligen Brüche, oder die Decimalbrüche.

II. Man theilt die Decimalbrüche in reine und in gemischte ein. Bey jenen sind keine Ganzen, sondern nur zehntheilige Bruchtheile; bey diesen aber sowohl Ganze als Bruchtheile vorhanden.

Um reine Decimalbrüchen zu bezeichnen, setzt man an die Stelle der Einer eine Nulle, nach dieser ein Comma (der sogenannten Einerstrich) und nun folgen die zehntheiligen Brüche. So heißt: z. B. 0,684 so viel als: Keine Ganzen, 6 Zehntel, 8 Hunderttel und

4 Tausendtel. Ferner ist: 0,00003 so viel als 3 Hunderttausendtel; ferner: 0,6000005 soviel als 6 Zehntel und 5 Zehnmilliontel u. s. w.

Die Brüche aber: 17,638 oder 385,94 oder 90,007 u. s. w. deren Bedeutung man leicht mit Worten aussprechen kann, sind gemischte Decimalbrüche.

§. 3.

Folgerungen aus dem Bisherigen.

Aus dieser Entstehung der Decimalbrüche fließen nachstehende Folgerungen:

I. 1 Zehner ist 10mal größer als 1 Einer, und 1 Zehntel ist 10mal kleiner als 1 Einer. Ferner ist 1 Hunderter 100mal größer; 1 Hunderttel aber 100mal kleiner als 1; desgleichen 1 Tausender 1000mal größer, so wie 1 Tausendtel 1000mal kleiner als 1, u. s. f.

II. So wie 10 Einer einen Zehner, 10 Zehner einen Hunderten, 10 Hunderte einen Tausenden, bilden u. s. w., so bilden auch wiederum 10 Tausendtel ein Hundertel, 10 Hundertel ein Zehntel, 10 Zehntel einen Einer u. s. w.

III. Gleichwie 1 Tausender, 10 Hunderte; 1 Hunderter, 10 Zehner; 1 Zehner, 10 Einer beträgt, so enthält auch 1 Einer, 10 Zehntel; 1 Zehntel, 10 Hunderttel; 1 Hunderttel, 10 Tausendtel u. s. f.

IV. Umgekehrt ist 1 Tausendtel der 10te Theil von 1 Hunderttel, 1 Hunderttel der 10te Theil von 1 Zehntel, 1 Zehntel der 10te Theil von 1 Einer, 1 Einer der 10te Theil von 1 Zehner u. s. w.

V. So wie z. B. der 10te Theil vom Zehner oder der 100te Theil vom Hunderter, oder der 1000te Theil

von Tausenden u. s. w. 1 Einer bildet, so betragen auch 10 Zehntel, oder 100 Hunderttel, oder 1000 Tausendtel wieder 1 Einer.

VI. Auch bilden z. B. 100 Zehntel einen Zehner, 1000 Zehntel einen Hunderten, 10000 Zehntel einen Tausenden u. s. f. Ferner betragen 100 Zehntausendtel so viel als 1 Hunderttel; 1000 Hunderttel einen Zehner; 10000 Hunderttel einen Hunderten u. s. f.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Wie entstehen Decimalbrüche aus unserm zehntheiligen Zahlensysteme? Warum heißen sie Brüche und warum Decimalbrüche? (§. 1.).

II. Wie werden Decimalbrüche bezeichnet und eingetheilt? Was nennt man den Einerstrich? Wie werden mit Worten gegebene Dec. Br. angeschrieben; wie die angeschriebenen richtig ausgesprochen? (§. 2.).

III. Wie lassen sich die Decimalbruchstellen mit den Ordnungen ganzer Zahlen vergleichen? (§. 3.).

II. Lehrübung.

Addition und Subtraction in Decimalbrüchen.

§. 1.

Decimalbrüche zu addiren.

Die Addition der Decimalbrüche beruht auf folgenden Regeln:

I. Man setze die gegebenen Brüche so unter einander, daß die gleichnamigen Bruchstellen in lothrechten

Linien stehen, welches immer dadurch am Einfachsten erhalten wird, daß sich sämmtliche Einerstriche senkrecht unter einander befinden.

II. Nachdem ein Absönderungsstrich gezogen ist, addire man, von der niedrigsten Stelle anfangend, die einzelnen Ordnungen gerade so, wie bey ganzen Zahlen, und schneide an der erhaltenen Summe von der Rechten zur Linken so viele Bruchstellen ab; als sich an jener der zu addirenden Zahlen befinden, welche ihrer am meisten hat.

Die Richtigkeit dieser Regeln folgt theils aus dem bekannten Grundsatze, daß die zu addirenden Zahlen gleichartig seyn müßen; theils daraus, daß die niedrigste Stelle der Summe nothwendig von jener Ordnung seyn muß, von welcher die niedrigste Ziffer jener der zu addirenden Zahlen ist, welche am meisten Bruchstellen hat. Folgende Beyspiele werden den Gang dieser Rechnung hinlänglich erläutern:

I. 0,734125
0,176
0,2378
0,71
0,326
} zu addirende Brüche.

2,183925 Summe.

II. 3,275
4,8321
6,53
1,78523
} zu addirende Brüche.

16,42233 Summe.

III. 24,00385
7,37
638,008
3,7252
0,63
5,7
18,6327
0,4
6,00008

zu addirende Brüche.

704,46983 Summe.

Noch bemerke man hier, daß z. B. der Decimalbruch 0,7 auch durch 70 Hunderttel, oder durch 700 Tausendtel, oder durch 7000 Zehntausendtel u. s. f. ausgedrückt werden kann. Denn da 1 Hundertel 10 mal kleiner, als 1 Zehntel ist, so müßen 10 Hunderttel wiederum 1 Zehntel und folglich 70 Hunderttel auch 7 Zehntel gleich seyn.

Daher ist auch z. B. 0,73 soviel als 73 Hunderttel, oder soviel als 730 Tausendtel, oder als 7300 Zehntausendtel u. s. f. Sollte man daher diese Decimalbrüche: 0,736, ferner 0,21, dann 0,8234 und endlich 0,9 zusammen addiren, so kann man sie alle nach Zehntausendtel ausdrücken, und es ist 0,736 soviel als 7360 Zehntausendtel, ferner 0,21 soviel, als 2100 Zehntausendtel, endlich 0,9 soviel, als 9000 Zehntausendtel, woraus die Rechnung folgende wird:

0,7360
0,2100
0,8234
0,9000

zu addirende Brüche.

2,6694 Summe.

§. 2.

Decimalbrüche zu subtrahiren.

Bey der Subtraction der Decimalbrüche treten folgende Hauptfälle ein:

I. Wenn der kleinere Bruch, er sey ein reiner oder gemischter, mit dem größern gleich viele Bruchstellen hat, so setze man beyde nach dem Gesetze der Gleichartigkeit unter einander, ziehe einen Absönderungsstrich, subtrahire gerade so, als wären es ganze Zahlen und schneide an dem Reste von der Rechten zur Linken eben so viele Ziffer ab, als sich an der größern oder kleinern Zahl Bruchstellen befinden; z. B.

I. 0,97538 größerer Bruch.
0,16215 kleinerer Bruch.

0,81323 Rest.

II. 46,79358 größerer Bruch
13,62037 kleinerer Bruch

33,17321 Rest.

III. 58,325142 größerer Bruch
19,879238 kleinerer Bruch

38,445904 Rest.

II. Wenn aber der kleinere Bruch weniger Bruchstellen, als der größere hat, so setze man jene Bruchstellen, welche in dem größern mehr als in dem kleinern sich befinden, unverändert unter den Querstrich, da von diesen nichts abgezogen werden soll, und verfahre mit den übrigen Ziffern wie vorher z. B.

0,7423846 größerer Bruch
0,2971 kleinerer Bruch

0,4452846 Rest.

III. Befinden sich in der kleinern Zahl mehr Bruchstellen, als in der größern, so denke man sich die an der letztern noch fehlenden mit Nullen ausgefüllt, subtrahire so, als wären es ganze Zahlen und schneide am Reste von der Rechten zur Linken so viele Ziffer ab, als die kleinere Zahl Bruchstellen hat. Z. B.

I. $23{,}825^{000}$ größere Zahl
8,738274 kleinere Zahl

15,086726 Rest

II. $34{,}734^{0000}$ größere Zahl
16,3700007 kleinere Zahl

18,3639993 Rest
16,3700007 kleinerer Bruch

34,7340000 Summe als Probe.

IV. Wenn ein reiner oder gemischter Decimalbruch von einer ganzen Zahl soll abgezogen werden, so denke man sich zur Rechten der Zahl so viele Nullen, als der abzuziehende Bruch Bruchstellen hat, ziehe nun wie in ganzen Zahlen ab, und bestimme den Einerstrich nach der Zahl der Bruchstellen des abzuziehenden Bruchs, z. B.

$8^{000000}(^{10}$ größere Zahl
0,743275 kleinere Zahl

7,256725 Rest.

1,000000 (10 größere Zahl
0,7329854 kleinere Zahl

0,2670146 Rest.

Die nämliche Probe, welche bey der Subtraction überhaupt Statt findet, kann auch bey der Subtraction in diesen Decimalbrüchen angewendet werden, welches den Anfängern Veranlassung zu Additions-Uebungen gibt. Auch kann die Probe der Addition durch die Subtraction angestellt werden.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Wie werden mehrere Decimalbrüche zusammen addirt? Worauf beruht die Richtigkeit dieser Vorschrift? Wie läßt sich jeder Decimalbruch in niedern Decimalbruchtheilen ausdrücken? (§. 1.)

II. Welche Fälle treten bey der Subtraction in Decimalbrüchen ein? Wie wird jede dieser Aufgaben aufgelöset und worauf beruht die Richtigkeit des Verfahrens? (§. 2.).

III. Lehrübung.

Multiplication in Decimalbrüchen.

§. 1.

Decimalbrüche durch 10, 100, 1000 u. s. f. zu multipliciren.

I. Da sowohl bey decimal ganzen Zahlen, als bey Decimalbrüchen der Werth jeder Ziffer von der Stelle abhängt, worin sie sich befindet, und dieser Stellenwerth bey Decimalbrüchen im Besondern durch den

Einerstriche bestimmt wird, so ist klar, daß, wenn man diesen Einerstrich um eine Ziffer von der Linken zur Rechten fortrückt, der Werth des ganzen Bruchs hierdurch 10mal größer werden muß. Wäre z. B. 0,758 der gegebene Bruch, dessen Einerstrich um 1 Ziffer zur Rechten fortrückte, so entstände dieser 7,58, worin die vorigen 7 Zehntel nunmehr 7 Einer, die vorigen 5 Hunderttel nun 5 Zehntel und die vorigen 8 Tausendtel nunmehr 8 Hunderttel sind. Daher ist durch diese Veränderung jede Ziffer, somit auch der ganze Bruch, 10mal größer geworden. Auf gleiche Weise ist auch $8{,}354 \times 10 = 83{,}54$; ferner $963{,}28 \times 10 = 9632{,}8$ u. s. w.

II. Soll daher der gegebene Decimalbruch mit 100 multiplicirt werden, so wird dieses dadurch bewirkt, daß man den Einerstrich um zwey Ziffer von der Linken zur Rechten rückt. Denn nun wird jede seiner Ziffer einen 100fach höhern Werth erhalten. So ist z. B. $0{,}87395 \times 100 = 87{,}395$; ferner $37{,}428 \times 100 = 3742{,}8$; ferner $0{,}0005 \times 100 = 0{,}05$; ferner $6{,}74 \times 100 = 674$.

Hieraus folgt die allgemeine Regel: Wenn man irgend einen Decimalbruch mit 1, woran sich mehrere Nullen befinden, multipliciren soll, so muß der Einerstrich um so viele Ziffer von der Linken zur Rechten gerückt werden, als wie viele Nullen neben der 1 stehen. Z. B. $18{,}4532 \times 1000 = 18453{,}2$; ferner $0{,}380476 \times 100000 = 38047{,}6$; ferner $0{,}0000008 \times 10000000 = 8$.

III. Befinden sich aber mehrere Nullen an der 1, als

der Multiplicand Bruchstellen hat, so könnte man den Einerstrich nicht um eben so viele Stellen zur Rechten fortrücken und müßte in diesem Falle zur Rechten der Ziffer dieses Multiplicanden noch so viele Nullen setzen, als wie viele Nullen der Multiplicator mehr hat. So ist z. B. 3,76 × 100000 = 376000. Denn 3,76 × 100000 = 3,76 × 100 × 1000. Aber 3,76 × 100 = 376; folglich ist 3,76 × 100 × 1000 = 376000. Auf gleiche Weise wird 0, 000085 × 100000000 = 8500 u. s. w.

§. 2.

Decimalbrüche durch Ganze ohne Nullen oder mit Nullen zu multipliciren.

I. Um einen gegebenen Decimalbruch durch eine ganze Zahl ohne Nullen zu multipliciren, setze man diesen Multiplicator wie gewöhnlich unter den Multiplicanden, ziehe einen Strich, multiplicire wie bey ganzen Zahlen und schneide am Producte von der Rechten zur Linken so viele Ziffer ab, als wie viele sich am Multiplicanden befinden. Der Grund dieses Verfahrens beruht zum Theil darauf, daß die Decimalbrüche nach dem Gesetze der decimal ganzen Zahlen gebildet sind; theils darauf, daß die niedrigste Stelle des Products der niedrigsten des Multiplicanden entsprechen muß. Folgende Beyspiele werden dieses näher erläutern:

I. 0,37285 Multiplicand
7 Multiplicator

2,60995 Product.

II. 48,7382 } Factoren
6 }

292,4292 Factum.

III. 0,73624 } Factoren
38 }

588992
220872

27,97712 Factum.

II. Sollte der Fall eintreten, daß ein Decimalbruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren wäre, welche mehr Ziffer, als er selbst hat, so kann man die Ziffer des Bruchs unter jene der ganzen Zahl setzen, die Multiplication wie gewöhnlich verrichten und dann am Producte von der Rechten zur Linken so viele Ziffer abschneiden, als der Bruch Bruchstellen hat. So gäbe z. B. 0,53 × 834 folgende Rechnung:

834 } Factoren
0,53 }

2502
4170

442,02 Product.

Denn 0,53 × 834 = 834 × 0,53, weil einerley Factoren, auch mit veränderter Ordnung, einerley Factum geben.

III. Befänden sich aber an der ganzen Zahl, womit der gegebene Bruch zu multipliciren ist, eine oder mehrere Nullen, so multiplicire man zuerst den Bruch blos mit den Ziffern des Multiplicators ohne auf die da-

ran befindlichen Nullen Rücksicht zu nehmen und sehe nun zu, ob sich an dem Multiplicanden eben so viele Bruchstellen als Nullen am Multiplicator befinden, oder ob die Zahl jener Bruchstellen größer, oder kleiner, als jene dieser Nullen ist. Im ersten Falle fällt der Einerstrich am Producte durchaus weg und es besteht aus lauter Ganzen. Im zweyten Falle schneide man am Producte von der Rechten zur Linken so viele Ziffer ab, und im dritten Falle setze man zur Rechten dieses Productes noch so viele Nullen bey, als die Differenz jener Zahlen beträgt. Der Grund dieses Verfahrens, welches nachfolgende Beyspiele erläutern, ist aus dem Bisherigen einleuchtend.

I. 387,426 Multiplicand
832000 Multiplicator

774852
1162278
3099408

322338432 Product.

II. 0,43275
2700 } Factoren

302925
86550

1168,425 Factum.

Hätte man hier nur mit 27 multiplicirt, so wären am Producte 5 Bruchstellen abgeschnitten worden. Da sich aber noch 2 Nullen an der 27 befinden, so müßte der Einerstrich wieder um 2 Stellen von der

Linken zur Rechten rücken, wodurch im Ganzen 5 — 2 = 3 Stellen abgeschnitten werden.

III. 0, 8379
15000000 } Factoren

41895
8379

12568500 Factum.

§. 3.

Decimalbrüche durch Decimalbrüche zu multipliciren.

I. Wenn ein Decimalbruch durch einen Decimalbruch multiplicirt werden soll, so setze man jenen, welcher am wenigsten Ziffer hat, unter den andern, ziehe einen Strich, multiplicire gerade so, als wenn beyde ganze Zahlen wären und schneide am Producte von der Rechten zur Linken so viele Ziffer ab, als sich an beyden Factoren zusammen befinden.

Der Grund dieses Verfahrens leuchtet am Einfachsten aus einem Beyspiele ein. Wenn man den Bruch 0,834 mit 0,62 multipliciren sollte, so sollen 834 Tausendtel mit 62 Hunderttel multiplicirt werden. Tausendtel mit Hunderttel multipliciren, heißt aber nichts anders, als jene Tausendtel hundertmal kleiner machen, woraus offenbar Hunderttausendtel entstehen. Daher muß die niedrigste Stelle des Products jene der Hunderttausendtel d. h. die fünfte Bruchstelle seyn. Die Rechnung ist:

0,834
0,62 } Factoren.

1668
5004

0,51708 Product.

II. In jedem andern Falle kann der Beweis auf ähnliche Weise geführt werden, wie auch folgende Beyspiele zeigen:

I. 0,2634
0,27 } Factoren.

18438
5268

0,071118 Product, an welches man, um die sechste Bruchstelle zu bilden, zur Linken noch eine Nulle hängen müßte.

II. 3,6254
0,832 } Factoren.

72508
108762
290032

3,0163328 Product.

III. 6,385
6,7 } Factoren.

44695
38310

42,7795 Factum.

IV. 0,000043
0,008 } Factoren.

0,000000344 Factum.

V. 0,00008
0,004 } Factoren

0,00000032 Product.

Aus diesem Beyspiele (V.) sieht man, daß das Product viel kleiner, als jeder seiner beyden Factoren ist, was bekanntlich in ganzen Zahlen niemals Statt findet. Der Grund liegt darin, daß z. B. 0,1 mit 0,1 multipliciren nichts anders heissen kann, als von 0,1 den zehnten Theil nehmen, was offenbar 0,01 gibt. Daher ist jede Multiplication mit eigentlichen Decimalbrüchen keine Vermehrung, sondern vielmehr eine Division. Etwas Aehnliches werden wir auch bey der Multiplication mit ächten gemeinen Brüchen in dem folgenden Lehrgange vernehmen.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Wie wird ein gegebener Decimalbruch durch 10 multiplicirt, wie durch 100, 1000 u. s. f. Was ist der Grund dieses Verfahrens? (§. 1.).

II. Wie multiplicirt man einen Decimalbruch durch eine ganze Zahl ohne Nullen, oder mit Nullen? Worauf beruht die Richtigkeit dieser Auflösung? (§. 2.).

III. Wie werden Decimalbrüche durch Decimalbrüche multiplicirt? Warum wird das Product kleiner, als jeder Factor, wenn die Factoren ächte Brüche sind? (§. 3.).

IV. Lehrübung.

Division in Decimalbrüchen.

§. 1.

Decimalbrüche durch 10, 100, 1000 u. s. f. zu dividiren.

I. Aus den seither von den Decimalbrüchen entwickelten Lehren geht hervor, daß jede Ziffer derselben einen zehnfach kleinern Werth erhält, wenn der Einerstrich um eine Stelle von der Rechten zur Linken rückt. Man denke sich z. B. den Bruch 89,374, worin 8 die Zehner, 9 die Einer und 3 die Zehntel bedeutet u. s. w., und lasse den Einerstrich zwischen die 9 und 8 um eine Stelle zur Linken rücken, nämlich: 8,9374 so ist klar, daß die vorigen 8 Zehner nunmehr 8 Einer, die vorigen 9 Einer nun 9 Zehntel, die vorigen 3 Zehntel nun 9 Hunderttel bedeuten u. s. w. wodurch jede Ziffer, vermöge ihrer Stelle, einen 10mal kleinern Werth erhalten hat. Daher entsteht die allgemeine Regel: Ein gegebener Decimalbruch wird durch 10 dividirt, wenn man seinen Einerstrich um eine Stelle zur Linken fortrückt. Sollte der Bruch keine Ganze enthalten, so muß ihm zur Linken noch eine Nulle angehängt werden. So ist z. B. 3,842 : 10 = 0,3842; ferner: 0,653 : 10 = 0,0653 oder: 0,007 : 10 = 0,0007 u. s. w.

II. Hieraus folgt nun weiter, daß ein Decimalbruch mit 100 dividirt werde, wenn man seinen Einerstrich um 2 Stellen zur Linken fortrückt; z. B. 38473 : 100 =

3,8473, oder: 52,6:100 = 0,526, oder: 0,34:100 = 0,0034 u. s. f.

Dies gibt überhaupt die Regel: Um einen Decimalbruch mit 1, woran sich mehrere Nullen befinden, zu dividiren, rücke man seinen Einerstrich um so viele Stellen gegen die Linke fort, als wie viele Nullen an dieser 1 stehen. Die etwa noch fehlenden Stellen werden mit Nullen ausgefüllt.

Demnach ist: 6341, 32 : 1000 = 6,34132; 83,45: 10000 = 0,008345; 3,6 : 1000000 = 0,0000036; 0,06: 1000 = 0,00006 u. s. f.

§. 2.

Decimalbrüche durch Ganze ohne Nullen zu dividiren.

I. Soll ein gegebner Decimalbruch durch eine ganze Zahl dividirt werden, so dividire man mit derselben gerade so, als wenn der Bruch eine ganze Zahl wäre und schneide sodann am gefundenen Quotienten von der Rechten zur Linken soviele Ziffer ab, als sich am Dividenden befinden. So ist z. B.
0,9775 : 5 = 0,1955. Denn es ist klar, daß, wenn Zehntausendtel durch fünf dividirt werden, zum Quotienten auch wieder Zehntausendtel erscheinen müßen.

II. Da aber diese Divisionen sich meistens nicht genau abschließen, sondern noch Reste lassen, so muß zuerst gezeigt werden, wie ein solcher, aus der Division in ganzen Zahlen entstandener Rest in Decimalbruchtheilen ausgedrückt werden kann. Es sey z. B.

Divisor	Dividend	Quotient.
2	319	159,5

2
11
10
19
18
10
10
ohne Rest.

Hier war nämlich 2 in 319 zuerst 159 mal enthalten und es blieb noch 1 vom Dividenden übrig, worin die 2 nicht mehr ganz enthalten ist. Hängt man aber an diese 1 eine Nulle und sieht die entstandenen 10 als 10 Zehntel an, so haben diese noch den Werth von 1. Da aber 2 in 10 Zehntel offenbar 5 Zehntelmal enthalten ist, so kommen diese 5 Zehntel noch in den Quotienten und die Division muß sich, da 2 mal 5 Zehntel wieder 10 Zehntel betragen, nun vollkommen schließen.

Wäre die Division diese:

Divisor	Dividend	Quotient.
4	211	52,75

20
11
8
30
28
20
20
ohne Rest.

so ist 4 in 211 vorerst 52 mal enthalten und 3 bleibt zum Reste. Hängt man eine Nulle daran, so sind diese 3 Einer nun in 30 Zehntel verwandelt, wovon 7 Zehntel den 4ten Theil bilden, welcher zunächst in den Quotienten gesetzt wird. Da nun, nach geschehener Multiplication, noch 2 Zehntel zum Reste bleiben, so drücke man, durch eine neu angehängte Nulle, diese 2 Zehntel in 20 Hundertel aus, welche den Divisor 4 gerade 5 mal enthalten d. h. von welchen 5 Hundertel der 4te Theil ist. Die Division ist also hierdurch abgeschlossen.

III. Indessen gibt es auch Fälle, in welchen diese Division sich nicht abschlieset, sondern ohne Ende fortwährt, wie folgende Beyspiele zeigen:

Divisor	Dividend	Quotient
I. 3	85	28,33333 . . . . ohne Ende
	6	
	25	
	24	
	10	
	9	
	10 ohne Ende.	

Divisor	Dividend	Quotient
II. 6	38,2	63,66666 . . . . ohne Ende
	36	
	22	
	18	
	40	
	36	
	40	
	36	
	40 ohne Ende.	

Divisor	Dividend	Quotient
III. 7	236	33,7142857 . . . . ohne Ende
	21	mit Wiederholung der
	26	sechs Ziffer: 714285
	21	
	50	
	49	
	10	
	7	
	30	
	28	
	20	
	14	
	60	
	56	
	40	
	35	
	50	
	49	
	1 ohne Ende.	

Divisor	Dividend	Quotient
IV. 9	385	42,7777 . . . ohne Ende
	36	
	25	
	18	
	70	
	63	
	70	
	63	
	70 ohne Ende.	

Da 2 und 5 in 10; 4 in 100; 8 in 1000 ohne Rest enthalten ist, so muß sich diese Division mit 2 und 5 in den Zehntel, mit 4 in den Hunderttel und mit 8 in den Tausendtel genau abschließen. Weil aber weder 3, noch 6, noch 7, noch 9, in 10 oder in 100 oder in 1000 u. s. w. ohne Rest enthalten ist, so muß sich die Reihe der Decimalbruchstellen hierbey ins Unendliche erstrecken. — Man bricht sie dann ab, wenn die erhaltenen Theile des Quotienten so klein sind, daß man sie vernachläßigen kann. Sollte man z. B. 24 fl. unter 9 Personen theilen, so wäre dieses soviel als $24 : 9 = 2{,}6666 \ldots$ fl. d. h. es bekäme einer 2 fl., 6 Zehntel fl., 6 Hunderttel fl. und die fernern 6 Tausendtel Gulden wären schon so höchst unbedeutend am Werthe, daß man sie für nichts achten könnte.

IV. Wenn daher bey der Division eines Decimalbruchs durch eine ganze Zahl am Schlusse ein Rest bleibt, so kann man eine Nulle anhängen und weiter dividiren, und dieses Verfahren, wenn noch mehrere Reste bleiben, solange fortsetzen, bis sich entweder die Division einmal schließet, oder bis die erhaltenen Bruchstellen sehr klein geworden sind. Folgende Beyspiele dienen zur Erläuterung:

Divisor	Dividend	Quotient
I. 15	8,354	0,5569333 . . . ohne Ende

75
85
75
104
90
140
135
50
45
50
45
50 ohne Ende.

Divisor	Dividend	Quotient
II. 26	28,432	1,47769 ohne Ende

26
124
104
202
182
200
182
180
156
240
234
6 ohne Ende.

Divisor	Dividend	Quotient
III. 231	0,32	0,00138 . . . ohne Ende
	320	
	231	
	890	
	693	
	1970	
	1848	
	122 Rest.	

Probe.

0,0138 Quotient
231 Divisor } Factoren

138
414
276

0,31878 Product
122 Rest

0,32000 Summe, das heißt 0,32.

Divisor	Dividend	Quotient
IV. 3142	0,8	0,000254 ohne Ende.
	8000	
	6284	
	17160	
	15710	
	14500	
	12568	
	1932 Rest.	

Probe.

3142 Divisor
0,000254 Quotient } Factoren

12568
15710
6284

0,798068 Product
1932 Rest

0,800000, das heißt 0,8.

Divisor	Dividend	Quotient
V. 25	0,1	0,004
	100	
	100	

ohne Rest.

§. 3.

Division einer ganzen Zahl durch einen Decimalbruch.

I. Wenn eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch dividirt werden soll, so sehe man den Bruch als eine ganze Zahl an, setze zur Rechten des Dividenden soviele Nullen, als wieviele Bruchstellen der Divisor hat und dividire nun gerade so, als wie man es bey ganzen Zahlen thut. Der Grund dieses Verfahrens liegt darin, daß man den Divisor und Dividenden mit der nämlichen Zahl multiplicirt hat, wodurch auch derselbige Quotient entstehen muß. Denn wenn z. B. 3 in 18 gerade 6 mal enthalten ist,

so muß auch 30 in 180 ferner 300 in 1800, weiter 3000 in 18000 u. s. f. ebenfalls 6 mal enthalten seyn.

II. Wäre nun z. B. 385 durch 0,05 zu dividiren, so ist 385 : 0,05 offenbar soviel als 385 × 100 : 0,05 × 100 d. h. soviel, als 38500 : 5, welches 7700 zum Quotienten gibt.

Sollte sich die Division nicht schließen, so könnte man an den entstehenden Rest eine Nulle hängen und die Division nunmehr weiter fortsetzen, wie folgende Beispiele lehren.

I. 643 : 0,15 ist soviel als

Divisor	Dividend	Quotient
15	64300	4286,6 . . .

60

43

30

130

120

100

90

100 ohne Ende.

II. 12 : 3,642 ist soviel als

Divisor	Dividend	Quotient
3642	12000	32,9 . . . .

10926

10740

7284

34560

32778

1782 ohne Ende.

III. 2735:0,5 ist soviel als

Divisor	Dividend	Quotient
5	27350	5470

25

23

20

35

35

ohne Rest.

§. 4.

Decimalbrüche durch Decimalbrüche zu dividiren.

I. Um einen Decimalbruch durch einen Decimalbruch zu dividiren, verwandle man die Division in eine solche, wobey der Divisor eine ganze Zahl ist, welches dadurch geschieht, daß Divisor und Dividend mit einer 1 nebst soviel Nullen multiplicirt wird, als wieviele Bruchstellen der Divisor hat. Der nun entstehende Quotient ist der richtige, da Divisor und Dividend mit der nämlichen Zahl multiplicirt worden ist. Es treten hierbey folgende drey Hauptfälle ein:

a) Entweder hat der Divisor eben so viele Bruchstellen, als der Dividend, oder

b) jener hat mehr, als dieser, oder

c) jener hat weniger, als dieser.

Im 1. Falle kann man beyde als ganze Zahlen betrachten und dividiren; im 2. fallen die Bruchstellen des Divisors hinweg und es kommen zur Rechten des

Dividenden so viele Nullen, als der Ueberschuß andeutet; im 3. Falle endlich fallen die Bruchstellen des Divisors hinweg und es bleiben noch so viele am Dividenden als jener Ueberschuß beträgt.

II. Nachfolgende Beyspiele erläutern diese Fälle:

I. Divisor	Dividend	Quotient
0,246	0,385	1,56...
	246	
	1390	
	1230	
	1600	
	1476	
	124 ohne Ende.	

II. Divisor	Dividend	Quotient
0,8352	0,1394	
8352	13940	0,16....
	8352	
	55880	
	50112	
	5768 ohne Ende.	

III. Divisor	Dividend	Quotient
0,3425	0,64	
3425	6400	1,86...
	3425	
	29750	
	27400	
	23500	
	20550	
	2950 ohne Ende.	

IV.

Divisor	Dividend	Quotient
2,43	8,3	
243	830	3,41....
	729	
	1010	
	972	
	380	
	243	
	137 ohne Ende.	

V.

Divisor	Dividend	Quotient
0,854	0,37642	
854	376,42	0,4407....
	341 6	
	34 82	
	34 16	
	6600	
	5978	
	622 ohne Ende.	

VI.

Divisor	Dividend	Quotient
3,46	8,54217	
346	854,217	2,4688....
	692	
	1622	
	1384	
	2381	
	2076	
	3057	
	2768	
	2890	
	2768	
	122 ohne Ende.	

§. 5.

Uebungs-Fragen.

I. Wie wird ein Decimalbruch durch 10 dividirt, wie durch 100, 1000 u. s. f. und worin liegt der Grund dieses Verfahrens? (§. 1.)

II. Wie werden Decimalbrüche durch Ganze dividirt? Wie verfährt man, wenn ein Rest bleibt? Wann schließt sich die Division und wann geht sie ins Unendliche fort? Wie lange wird sie fortgesetzt? (§. 2.)

III. Wie dividirt man eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch? Worin liegt der Grund dieses Verfahrens.

IV. Wie werden Decimalbrüche durch Decimalbrüche dividirt? Worauf gründet sich dieses Verfahren? Wie lange wird diese Division fortgesetzt?

Sechster Lehrgang.

Entstehung und Rechnungsarten der gemeinen Brüche.

I. Lehrübung.

Grundbegriffe und Vodersätze.

§. 1.

Entstehung, Bezeichnung und Arten der gemeinen Brüche.

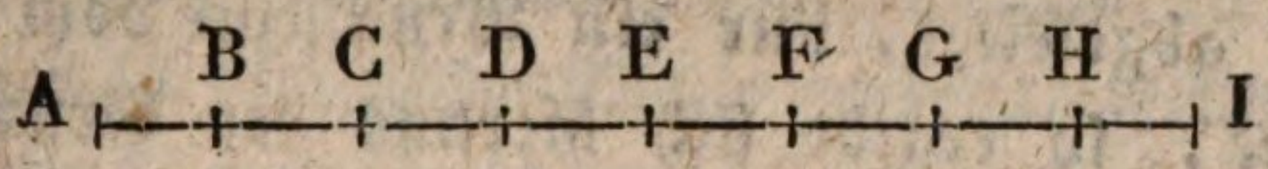
I. Bey den Decimalbrüchen wird die Einheit 10, 100, 1000, 10000 u. s. f. gleiche Theile getheilt. Dieses ist willkührlich und man kann annehmen, das Ganze sey in 4, 7, 12, 15 u. s. f. gleiche Theile abgetheilt. Hierdurch entstehen die gewöhnlichen

oder die gemeinen Brüche, bei welchen man zweyerley wissen muß:

a) in wie viele gleiche Theile die Einheit getheilt worden ist, und

b) wie viele solcher Theile wiederum in ein Ganzes zusammengefaßt werden.

Da sowohl Jenes, als Dieses durch eine Ziffer oder durch mehrere ausgedrückt werden kann, so wird jeder gemeine Bruch durch zwey Zahlen bezeichnet. Jene, welche anzeigt, in wie viele gleiche Theile die Einheit getheilt ist, wird der Nenner; diese aber, welche die Menge der vorhandenen Bruchtheile bestimmt, der Zähler genennt.



Wenn z. B. das Ganze A I in 8 gleiche Theile getheilt ist, so heißt A B ein Achtel (ein achter Theil des Ganzen) A C sind zwey Achtel, A D drey Achtel, A E vier Achtel u. s. f. bis A I welche aus acht Achtel besteht. Man schreibt den Zähler oberhalb, den Nenner unterhalb eines gezognen Querstrichs; z. B. $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, u. s. w.

Der Bruch $\frac{4}{17}$ (vier Siebenzehntel) heißt soviel, als das Ganze ist in 17 gleiche Theile getheilt, und 4 von diesen Theilen sind vorhanden. Der Bruch $\frac{26}{139}$ bedeutet soviel, als das Ganze ist in 139 Theile getheilt und 26 derselben sind vorhanden u. s. f.

II. Die Brüche sind entweder ächte (eigent-

liche) oder unächte (uneigentliche) je nach dem sie, ihrem Werthe nach, kleiner als das Ganze, oder dem Ganzen gleich oder größer als das Ganze sind. So ist z. B. jeder der Brüche: $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{8}$, ein wahrer Bruch, da jeder derselben kleiner, als das Ganze ist. Der Bruch $\frac{8}{8}$ aber, welcher dem Ganzen gleich ist und z. B. $\frac{11}{8}$, welcher noch $\frac{3}{8}$, mehr als das Ganze beträgt, wird ein unächter Bruch genennt. Da das Wort Bruch, von Brechen abgeleitet, nur ein Bruchstück vom Ganzen bezeichnet, so ergibt sich hieraus der Grund dieser Benennungen.

§. 2.

Folgerungen hieraus.

1. Aus diesen Bestimmungen folget, daß man die Brüche auch so erklären kann. Brüche sind Zahlen, deren Einheiten Theile eines gleichgetheilten Ganzen sind. Daß das Ganze in gleiche Theile getheilt seyn müße, versteht sich von selbst hierbey. Die Einheit der Bruchzahlen ist nicht die, den ganzen Zahlen zum Grunde liegende 1, sondern einer jener gleichen Theile, worin diese 1 willkührlich getheilt worden ist. So ist z. B. $\frac{1}{5}$, die Einheit von $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{65}$ die Einheit von $\frac{19}{65}$; ferner $\frac{1}{246}$ die Einheit von $\frac{236}{246}$ u. s. f.

Die gemeinen Brüche entstehen durch eine Division und, wenn ihr Zähler größer, als 1 ist, auch durch eine Multiplication. Denn es ist z. B. $\frac{7}{24}$ soviel, als $\frac{1}{24}$ siebenmal genommen, und $\frac{1}{24}$ ist soviel, als der 24te Theil von 1, d. h. soviel, als 1 : 24.

II. Daher ist jeder Bruch einem Quotienten gleich, dessen Nenner der Divisor und dessen Zähler der Dividend ist. Es muß z. B. $\frac{8}{15}$ soviel, als 8 : 15 seyn. Denn $\frac{8}{15}$ heißt soviel, als den 15ten Theil von 1 achtmal nehmen. Wenn man aber 8 durch 15 dividirt, so wird 8 in 15 gleiche Theile getheilt, welches 8 mal mehr geben muß, als wenn man 1 in 15 gleiche Theile theilte. Da nun 1 : 15 offenbar $\frac{1}{15}$ ist, so muß 8 : 15 auch soviel als $\frac{8}{15}$ seyn.

III. Auf gleiche Art läßt sich umgekehrt zeigen, daß auch jeder Quotient einen Bruch bedeutet, dessen Nenner der Divisor, dessen Zähler der Dividend ist; oder daß z. B. $15 : 37 = \frac{15}{37}$ sey.

Wenn der Divisor dem Dividenden gleich, oder kleiner, oder größer, als dieser ist, so wird der Quotient selbst $= 1$, oder größer, oder kleiner als 1.

Daher ist auch der Werth eines Bruches entweder 1, oder größer, oder kleiner als 1, wenn sein Nenner seinem Zähler gleich, oder kleiner, oder größer als derselbige ist.

§. 3.

Auflösung vorbereitender Aufgaben.

Aus dem Bisherigen ergeben sich die Auflösungen folgender Aufgaben:

I. Die Menge der Ganzen zu finden, welche in einem uneigentlichen Bruche enthalten ist.

Wenn man mit dem Nenner in seinen Zähler dividirt, so zeigt der Quotient diese zu findende Zahl der Ganzen, welcher entweder eine reine ganze Zahl, oder eine ganze Zahl nebst einem Bruche ist.

So ist z. B. $\frac{35}{7} = 5$. Denn da $\frac{7}{7} = 1$, so muß $\frac{14}{7} = 2$, $\frac{21}{7} = 3$, $\frac{28}{7} = 4$ und $\frac{35}{7} = 5$ seyn. Ferner ist $\frac{80}{10} = 8$; $\frac{128}{4} = 32$; $\frac{319}{12} = 26\frac{7}{12}$; $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$; $\frac{88}{3} = 29\frac{1}{3}$ u. s. f.

II. Eine gegebene ganze Zahl in einen Bruch zu verwandeln, welcher einen gegebenen Nenner hat.

Hier multiplicire man die gegebene Zahl mit dem gegebenen Nenner des Bruches und setze unter dieses Product den Nenner.

Wie viele 8tel sind 7 Ganze. Hier ist $\frac{56}{8} = 7$.

Denn da $\frac{8}{8} = 1$, so muß $\frac{16}{8} = 2$; $\frac{24}{8} = 3$; $\frac{32}{8} = 4$; $\frac{40}{8} = 5$; $\frac{48}{8} = 6$ und $\frac{56}{8} = 7$ seyn. Sollen

12 Ganze in Ytel verwandelt werden, so ist $\frac{12 \times 9}{9}$

$= 12$, d. h. $\frac{108}{9} = 12$ u. s. w.

§. 4.

Veränderung des Bruchs durch Veränderung seines Zählers und Nenners.

I. Da der Zähler die Menge der vorhandenen Bruchtheile ausdrückt, so ist klar, daß der Werth eines Bruches vergrößert oder verkleinert werde, wenn, bey unverändertem Nenner, sein Zähler größer oder kleiner wird.

Es sey z. B. $\frac{5}{8}$ der gegebene Bruch. Wird zu seinem Zähler die Zahl 2 addirt, so entsteht der neue Bruch $\frac{7}{8}$, welcher offenbar um $\frac{2}{8}$ größer, als $\frac{5}{8}$ ist. Multiplicirte man aber dessen Zähler mit 2, so erhielte man $\frac{10}{8}$ zum Resultate, welches offenbar 2mal so groß, als $\frac{5}{8}$ ist.

Daher wird ein gegebener Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man seinen Zähler damit multiplicirt und unter dieses Product seinen Nenner setzt.

Es ist demnach $\frac{5}{6} \times 8 = \frac{40}{6} = 6\frac{4}{6}$; Ferner:

$\frac{3}{7} \times 12 = \frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$ u. s. f.

II. Wäre nun z. B. $\frac{12}{19}$ ein gegebner Bruch und man zöge vom Zähler die Zahl 3 ab, so entstände der Bruch $\frac{9}{19}$, welcher um $\frac{3}{19}$ kleiner, als $\frac{12}{19}$ ist. Dividirte man aber den Zähler des Bruchs $\frac{12}{19}$ mit 3, so entstände der Bruch $\frac{4}{19}$, welcher offenbar 3mal kleiner, als $\frac{12}{19}$ ist.

Es wird demnach ein gegebener Bruch durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man seinen Zähler durch dieselbe dividirt und seinen Nenner unverändert läßt. Daher ist $\frac{24}{37} : 3 = \frac{8}{37}$; $\frac{14}{25} : 2 = \frac{7}{25}$; $\frac{128}{339} : 4 = \frac{32}{339}$ u. s. f.

III. Wäre nun z. B. $\frac{7}{12}$ der gegebene Bruch und man addirte zu seinem Nenner die Zahl 2, so entstände der Bruch $\frac{7}{14}$, welcher kleiner, als $\frac{7}{12}$ seyn muß, da $\frac{1}{14}$ kleiner, als $\frac{1}{12}$ ist. Denn wenn man aus dem nämlichen Ganzen mehr gleiche Theile bildet, so muß jeder derselben kleiner werden, als wenn weniger daraus gebildet werden. Multiplicirte man seinen Nenner mit 2, so entstände der Bruch $\frac{7}{24}$, welcher

halb so groß, als $\frac{7}{12}$ ist, da $\frac{1}{24}$ die Hälfte von $\frac{1}{12}$ ist.

Daher wird ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man seinen Nenner, bey unverändertem Zähler, mit ihr multiplicirt. Es ist demnach $\frac{9}{41} : 2 = \frac{9}{82}$; $\frac{6}{11} : 5 = \frac{6}{55}$; $\frac{12}{31} : 10 = \frac{12}{310}$ u. s. f.

IV. Wenn man aber von dem Nenner eines Bruchs eine gegebene Zahl abzieht, so wird der Bruch hierdurch vergrößert. Macht man z. B. aus $\frac{12}{17}$ den Bruch $\frac{12}{13}$, so ist letzterer größer, als ersterer, da $\frac{1}{13}$ größer, als $\frac{1}{17}$ ist. Dividirt man den Nenner eines Bruches, bey unverändertem Zähler, z. B. mit 2, so ist der Bruch noch einmal so groß, als der gegebene. Es ist z. B. $\frac{9}{42} \times 2 = \frac{9}{42:2} = \frac{9}{21}$; denn $\frac{1}{21}$ ist noch einmal so groß, als $\frac{1}{42}$. Desgleichen ist $\frac{7}{24} \times 3 = \frac{7}{8}$; $\frac{11}{144} \times 8 = \frac{11}{18}$ u. s. w.

Daher wird ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man seinen Nenner durch dieselbe dividirt.

Ferner folgt hieraus, daß ein gegebener Bruch auf doppelte Weise mit einer gegebenen Zahl multiplicirt oder dividirt werden kann.

V. Endlich ist aus diesen Sätzen klar, daß der Werth eines Bruches unverändert bleibt, wenn man seinen Zähler und seinen Nenner mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt. Denn eine Größe, welche man sovielmal vergrößert, als man sie nachher wieder verkleinert, bleibt unverändert am Werthe. Es ist daher $\frac{7}{11} = \frac{7 \times 3}{11 \times 3} = \frac{21}{33} = \frac{21 \times 5}{33 \times 5}$ $= \frac{105}{165} = \frac{1050}{1650}$ u. s. w. Ferner ist $\frac{248}{484} = \frac{248 : 2}{484 : 2}$ $= \frac{124}{242} = \frac{124 : 2}{242 : 2} = \frac{62}{121}$. Oder $\frac{37}{296} = \frac{37 : 37}{296 : 37}$ $= \frac{1}{8}$ u. s. f.

§. 5.

Vom Heben der Brüche.

Einen gegebenen Bruch heben, heißt soviel, als seinen Zähler und Nenner in kleinern Zahlen ausdrücken, ohne daß er selbst an seinem Werthe verliehrt; Einen Bruch zur kleinsten Benennung bringen, heißt aber, ihn in den kleinsten Zahlen ausdrücken, ohne daß er am Werthe verändert wird. Es gewährt einen doppelten Vortheil, da man die Größe eines Bruchs in kleinern Zahlen leichter übersehen, auch mit kleinern Zahlen bequemer, als mit größern rechnen kann. Um einen Bruch zu heben, kömmt es darauf an, eine Zahl zu finden, welche in seinem Zähler und Nenner ohne Rest enthalten ist. Man bemerke folgende Vorschriften:

I. Man dividire mit dem Zähler des zu hebenden

Bruchs in seinen Nenner. Geht diese Division ohne Rest auf, so wird 1 der Zähler des neuen Bruches; der Quotient dieser Division aber dessen Nenner. So ist z. B. $\frac{8}{57} = \frac{8:8}{57:8} = \frac{1}{7}$, wo $\frac{1}{7}$ offenbar die kleinste Benennung von $\frac{8}{57}$ ist, da der Zähler eines Bruches nicht kleiner, als 1 werden kann, ohne selbst ein Bruch zu werden.

II. Wenn bey dieser ersten Division ein Rest bleibt, so dividire man mit demselben in den vorigen Divisor. Bricht diese Division nun ab, so ist dieser letztere Divisor die Zahl, welche den Bruch zur kleinsten Benennung bringt. Z. B. der Bruch sey $\frac{6}{27}$, so ist die Rechnung diese:

```
6 | 27 | 4
  | 24 |
------------
3 | 6  | 2
  | 6  |
------------
ohne Rest.
```

Es wird demnach $\frac{6}{27} = \frac{6:3}{27:3} = \frac{2}{9}$.

Bey $\frac{8}{60}$ ist die Rechnung:

```
8 | 60 (7
  | 56
------------
4 | 8 (2
  | 8
------------
ohne Rest.
```

Daher wird $\frac{8}{60} = \frac{8:4}{60:4} = \frac{2}{15}$.

III. Bleibt bey dieser zweyten Division wieder ein Rest, so dividire man wieder mit ihm in den vorigen Divisor. Wird diese Division geschlossen, so ist der letzte Divisor die gesuchte Zahl. Der Bruch sey $\frac{35}{63}$, so ist die Rechnung:

```
35 | 63 ( 1
   | 35
   ----
28 | 35 ( 1
   | 28
   ----
 7 | 28 ( 4
   | 28
   ----
ohne Rest.
```

Demnach wird $\frac{35}{63} = \frac{35 : 7}{63 : 7} = \frac{5}{9}$.

IV. Zeigte sich aber auch nun wieder ein Rest, so setze man diese Divisionen so lange fort, bis sie sich entweder einmal schließen, oder bis 1 zum Reste bleibt, in welchem letztern Falle der gegebene Bruch schon auf der kleinsten Benennung sich befindet. Wäre der Bruch dieser $\frac{17}{375}$, so würde die Rechnung folgende:

```
17 | 378 ( 22
   | 34
   ----
 4 | 17 ( 4
   | 16
   ----
 1 | 4 ( 4
   | 4
   ----
ohne Rest.
```

Daher befindet sich der Bruch $\frac{17}{378}$ schon auf der kleinsten Benennung.

Der Grund dieser Vorschriften ist nicht schwer nachzuweisen. Wir wählen z. B. den Fall in II. worin $\frac{6}{27}$ der gegebene Bruch ist. Da hier 27 das 4fache von 6 nebst einem Reste 3; diese 3 aber genau in 6 enthalten ist, so kann man so sagen: 3 ist in 6 gerade 2mal; 6 aber in 27 wieder 4mal nebst 3 enthalten; daher muß auch 3 in 27 enthalten seyn: 2mal, 4mal, und 1mal d. h. 8mal und 1mal oder 9mal. Auf ähnliche Weise läßt sich jeder andere hierher gehörige Fall entwickeln.

§. 6.

Ungleichartige Brüche, mit Beybehaltung ihres Werthes, gleichartig zu machen.

I. Die Art der Brüche wird durch ihren Nenner bestimmt, da dieser die Menge der Theile angibt, in welche das Ganze getheilt worden ist, oder was für Theile das Ganze enthält. Daher sind zwey Brüche gleichartig, welche einerley Nenner haben; ungleichartig aber, wenn ihre Nenner verschieden sind. Die Brüche $\frac{7}{12}$ und $\frac{5}{12}$ sind gleichartige; $\frac{9}{13}$ und $\frac{8}{17}$ aber ungleichartige Brüche. Denn 13tel und 17tel sind ungleichvielfache Theile des nämlichen Ganzen, welche, als solche, so wenig addirt oder subtrahirt werden können, als z. B. Pfunde und Lothe.

II. Soll man zwey gegebene ungleichartige Brüche gleichartig machen, oder, wie man sagt, unter einerley Benennung bringen, und des einen Nenner ist in dem Nenner des andern ohne Rest enthalten, so multiplicire man Zähler und Nenner dieses andern Bruches mit dem Quotienten aus dieser Division. Wenn z. B. $\frac{7}{12}$ und $\frac{19}{60}$ die zwey ungleichartigen Brüche sind, wo der Nenner 12 in dem Nenner 60 gerade 5mal enthalten ist, so wird $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 5}{12 \times 5} = \frac{35}{60}$; ein Bruch, welcher mit $\frac{19}{60}$ gleichartig ist. Daß aber $\frac{7}{12} = \frac{35}{60}$ sey, folgt aus §. 4. V.

Ein ähnliches Verfahren läßt sich bisweilen auch bey mehreren Brüchen anwenden. So ist z. B. bey $\frac{7}{24}$ und $\frac{19}{72}$ und $\frac{101}{144}$, weil 24 in 144 gerade 6mal; 72 aber in 144 gerade 2mal enthalten ist, $\frac{7}{24} = \frac{7 \times 6}{24 \times 6} = \frac{42}{144}$ und $\frac{19}{72} = \frac{19 \times 2}{72 \times 2} = \frac{38}{144}$, welche beyde Brüche mit $\frac{101}{144}$ gleichartig sind.

III. Hat dieses Verhalten der Nenner nicht Statt, so befolge man diese Regel: Bey zwey Brüchen multiplicire man Zähler und Nenner des ersten mit dem Nenner des zweyten und umgekehrt; bey mehreren aber Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit dem Producte aus den Nennern der übrigen Brüche.

Wären z. B. $\frac{7}{11}$ und $\frac{5}{9}$ die beyden Brüche, so

würde $\frac{7}{11} = \frac{7 \times 9}{11 \times 9} = \frac{63}{99}$ und $\frac{5}{9} = \frac{5 \times 11}{9 \times 11}$ $= \frac{55}{99}$.

Ferner gibt $\frac{8}{12}$ und $\frac{10}{17}$ soviel als $\frac{8}{12} = \frac{8 \times 17}{12 \times 17}$ $= \frac{136}{204}$ und $\frac{10}{17} = \frac{10 \times 12}{17 \times 12} = \frac{120}{204}$ u. s. w.

Für die drey Brüche: $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{9}$ und $\frac{2}{3}$ wird $\frac{4}{5}$ $= \frac{4 \times 9 \times 3}{5 \times 9 \times 3} = \frac{108}{135}$; ferner $\frac{7}{9} = \frac{7 \times 5 \times 3}{9 \times 5 \times 3}$ $= \frac{105}{135}$ und $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5 \times 9}{3 \times 5 \times 9} = \frac{90}{135}$. Daß die neuen Brüche den vorigen gleich seyn müssen, folgt aus §. 4. V; die Gleichheit ihrer Nenner geht aber aus dem Satze hervor, daß einerley Factoren immer einerley Factum geben.

IV. Noch dient diese Aufgabe dazu, um zu erkennen, wie mehrere gegebene Brüche hinsichtlich ihrer Größe nach einander folgen. So ist z. B. von den nun so eben genannten Brüchen $\frac{4}{5}$ der größte, $\frac{7}{9}$ der mittlere und $\frac{2}{3}$ der kleinste, da jener 108, der andere 105 und der dritte 90 der gefundenen 135tel enthält.

V. Endlich kann man hierbey merken: Wenn zwey Brüche gleiche Nenner haben, so ist jener der größte, welcher den größten Zähler hat; haben zwey Brüche gleiche Zähler, so ist jener der größte, welcher den kleinsten Nenner hat; und wenn der Zähler eines

Bruches größer, als der Zähler eines andern; des erstern Nenner aber kleiner, als der des andern ist, so muß jener Bruch größer, als dieser seyn. So ist z. B. $\frac{12}{19}$ größer, als $\frac{8}{31}$. Dort sind mehr größere, hier weniger kleinere Theile vorhanden.

§. 7.

Uebungs-Fragen.

I. Was sind gemeine Brüche, wie entstehen sie, was ist der Nenner und der Zähler, was sind ächte und unächte Brüche? (§. 1.).

II. Wie lassen sich die Brüche noch mehr erklären? Auf welche Art entsteht ein Bruch durch Division und Multiplication. (§. 2.).

III. Wie findet man die in einem ächten Bruche enthaltenen Ganzen? Wie verwandelt man eine ganze Zahl in einen Bruch von gegebenem Nenner? (§. 3.).

IV. Welche Veränderung erleidet ein Bruch durch Vermehrung oder Verminderung seines Zählers? Welche durch Vermehrung oder Verminderung seines Nenners? — Wie wird ein Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt, wie durch dieselbe dividirt? — Durch welche Veränderung des Zählers und Nenners bleibt der Werth eines Bruches unverändet? (§. 4.).

V. Was heißt man: Brüche heben? Wie verfährt man, um gegebene Brüche zu heben? Wozu nützt das Heben der Brüche?

VI. Worin besteht die Art der Brüche? Was sind gleichartige und ungleichartige Brüche? Wie werden zwey, wie mehrere Brüche unter einerley Benennung gebracht? Wozu nützt die Auflösung dieser Aufgabe?

II. Lehrübung.

Die Addition in gemeinen Brüchen.

§. 1.

Gleichartige und ungleichartige Brüche zu addiren.

I. Wenn die zu addirenden Brüche einerley Nenner haben, so addire man ihre Zähler und setze unter ihre Summe den gemeinschaftlichen Nenner. So ist z. B. $\frac{6}{8} + \frac{7}{8} = \frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$. Denn die Nenner drücken die Art, die Zähler die Vielheit der Bruchtheile aus. Durch die Addition wird jene Vielheit vermehrt; die Art aber kann nicht verändert werden. Auf gleiche Weise ist ferner $\frac{12}{17} + \frac{16}{17} = \frac{28}{17} = 1\frac{11}{17}$. Oder $\frac{7}{12} + \frac{11}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{24}{12} = 2$. Ferner $\frac{9}{15} + \frac{7}{15} + \frac{8}{18} = \frac{24}{15} = 1\frac{9}{15}$ oder $1\frac{3}{5}$. Endlich ist $\frac{18}{24} + \frac{38}{24} + \frac{46}{24} + \frac{17}{24} = \frac{119}{24} = 4\frac{23}{24}$.

II. Sind die gegebenen Brüche ungleichartig, so bringe man sie zuerst unter einerley Benennung und verfahre nun wie vorhin. So ist z. B. $\frac{7}{8} + \frac{3}{5} + \frac{4}{9} = \frac{7 \times 5 \times 9}{8 \times 5 \times 9} + \frac{3 \times 8 \times 9}{5 \times 8 \times 9} + \frac{4 \times 8 \times 5}{9 \times 8 \times 5}$

$= \frac{315}{360} + \frac{216}{360} + \frac{160}{360} = \frac{315 + 216 + 160}{360} =$

$\frac{691}{360} = 1\frac{331}{360}$. — Ferner sey $\frac{7}{10} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} + \frac{4}{9}$ zu bilden, so ist $\frac{7}{10} = \frac{7 \times 5 \times 2 \times 9}{10 \times 5 \times 2 \times 9} = \frac{630}{900}$; $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 10 \times 2 \times 9}{5 \times 10 \times 2 \times 9} = \frac{540}{900}$; $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 10 \times 5 \times 9}{2 \times 10 \times 5 \times 9} = \frac{450}{900}$ und $\frac{4}{9} = \frac{4 \times 10 \times 5 \times 2}{9 \times 10 \times 5 \times 2} = \frac{400}{900}$. Folglich ist die Summe der vier Brüche

$$= \frac{630 + 540 + 450 + 400}{900} = \frac{2020}{900} = \frac{202}{90} = 2\frac{22}{90} = 2\frac{11}{45} \text{ u. s. f.}$$

§. 2.

Vermischte Zahlen zu addiren.

I. Unter vermischten Zahlen versteht man solche, welche aus Ganzen nebst Brüchen bestehen; z. B. $7\frac{4}{5}$; $13\frac{6}{9}$; $28\frac{12}{19}$ u. s. w. Vermischte Zahlen Einrichten heißt, ihre Ganze mit den Bruchtheilen in unächte Brüche verwandeln, welche den gemischten Zahlen am Werthe gleich sind. Es geschieht dadurch, daß die Ganze in Brüche verwandelt werden, welche mit den gegebenen gleiche Nenner haben, zu welchem man sie sodann addirt. Um z. B. $8\frac{5}{11}$ einzurichten, sage man:

$8 = \frac{8 \times 11}{11} = \frac{88}{11}$; folglich muß $8 + \frac{5}{11} = \frac{88}{11} +$

$\frac{5}{11} = \frac{93}{11}$ seyn. Ferner ist $24\frac{6}{7} = \frac{24 \times 7}{7} + \frac{6}{7}$

$= \frac{168 + 6}{7} = \frac{174}{7}$.

Die practische Regel heißt: Man multiplicire mit dem Nenner des Bruchs die ganze Zahl, addire den Zähler desselben hinzu und schreibe unter diese Summen den Nenner; z. B. $7\frac{4}{11}$ gibt 11mal 7 oder 77; dazu die 4 addirt, macht $\frac{81}{11}$ u. s. f.

II. Um gemischte Zahlen zu addiren, können sie entweder zuerst eingerichtet, unter einerley Nenner gebracht und nun wie gewöhnlich addirt werden; oder man kann noch kürzer die Ganze zu den Ganzen und die Brüche zu den Brüchen addiren. Z. B. $7\frac{2}{9}$

$+ 10\frac{5}{8} = \frac{65}{9} + \frac{85}{8} = \frac{65 \times 8 + 85 \times 9}{9 \times 8} =$

$\frac{520 + 765}{72} = \frac{1285}{72} = 17\frac{61}{72}$. —

Auf die andere Weise ist $7\frac{2}{9} + 10\frac{5}{8} = 7 +$

$10 + \frac{2}{9} + \frac{5}{8} = 17 + \frac{16}{72} + \frac{45}{72} = 17 + \frac{61}{72}$, wie vorhin.

§. 3.

Addition gemeiner Brüche durch Decimalbrüche.

I. Wenn mehrere gemeine Brüche addirt werden sollen, welche mehrzifferige Zahlen zu Nennern haben, so führt die Aufgabe, sie zuerst unter einerley Benennung zu bringen, öfters auf große Zahlen und langweilige Rechnungen. Hier ist es bequemer, dergleichen Brüche zuerst in Decimalbrüche zu verwandeln und letztere zu summiren.

Man verwandelt aber einen gemeinen Bruch in einen zehntheiligen, wenn man dessen Nenner in dessen Zähler dividirt, wobey zuweilen (wenn der Bruch ein ächter ist) eine Nulle (oder mehrere) an denselben gehängt werden müssen. Es ist z. B. $\frac{5}{8} = 0{,}625$; $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{178}{5} = 35{,}6$. In vielen Fällen bricht aber diese Division nicht ab, sondern man erhält (gerade wie oben im fünften Lehrgange, IV. Lehrüb. §. 2) eine unendliche Menge von Decimalbruchstellen, welche man aber, wenn diese Stellen klein genug sind, als abgeschlossen ansehen kann z. B. $\frac{15}{7} = 2{,}1428571\ldots$. ferner ist $\frac{29}{6} = 4{,}83333\ldots$ oder $\frac{2}{3} = 0{,}66666\ldots$ oder $\frac{115}{12} = 9{,}58333\ldots$

II. Wenn nun mehrere gemeine Brüche zu addiren sind, so verwandle man sie zuerst in zehntheilige und

addire diese letztere. Wäre z. B. die Summe von $\frac{3}{4} + \frac{7}{9} + \frac{11}{12} + \frac{9}{17} + \frac{23}{8} + \frac{18}{7}$ zu bilden, so ist

$$\frac{3}{4} = 0{,}75$$
$$\frac{7}{9} = 0{,}77777\ldots$$
$$\frac{11}{12} = 0{,}91666\ldots$$
$$\frac{9}{17} = 0{,}52941\ldots$$
$$\frac{23}{8} = 2{,}875$$
$$\frac{18}{7} = 2{,}57142$$

folglich 7,67026 ... die Summe.

Eine Probe hierüber läßt sich dadurch machen, daß die gemeinen Brüche auf gewöhnliche Weise addirt werden, und daß man die nun erhaltene Summe in einen Decimalbruch verwandelt, welcher dem vorhin gefundenen (bis auf die niedrigste Stelle etwa) gleich seyn wird.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Wie werden gleichartige Brüche zusammen addirt? Wie verfährt man bey ungleichartigen Brüchen? (§. 1.)

II. Was nennt man vermischte Zahlen? Was heißt es: Vermischte Zahlen Einrichten? Wie geschieht dieses

Einrichten? Worauf beruhet die Richtigkeit des Verfahrens? (§. 2.)

III. Wie werden gemeine Brüche in Decimalbrüche verwandelt? Wann kann diese Verwandlung genau, wann nur annäherungsweise geschehen? Wie addirt man gemeine Brüche durch ihre Verwandlung in zehntheilige Brüche? Wann ist diese Methode vortheilhaft? Wie läßt sich über dieses Verfahren eine Probe machen?

III. Lehrübung.

Die Subtraction in gemeinen Brüchen.

§. 1.

Gleichartige und ungleichartige Brüche zu subtrahiren.

I. Da die zu subtrahirenden Zahlen gleichartig seyn müssen, so müssen auch die abzuziehenden Brüche einerley Nenner haben; oder, wenn sie ungleichartig sind, zuerst auf einerley Benennung gebracht werden. Wenn dieses ist, so wird der kleinere Zähler vom größern abgezogen und unter die Differenz der gemeinschaftliche Nenner gesetzt. Der Grund dieses Verfahrens ist dieser, daß der Zähler die Menge der vorhandenen Bruchtheile; der Nenner aber nur ihre Art andeutet. Der Unterschied der Brüche besteht demnach in der Differenz ihrer Zähler. Da aber durch diesen Abzug die Art der Bruchtheile nicht verändert werden kann, so muß dieser Nenner wieder unter die Differenz der Zähler kommen.

Es ist demnach $\frac{12}{19} - \frac{7}{19} = \frac{5}{19}$; $\frac{23}{36} - \frac{15}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$; $\frac{38}{149} - \frac{30}{149} = \frac{8}{149}$ u. s. f. Ferner ist auch $\frac{9}{13} - \frac{7}{19} = \frac{9 \times 19}{13 \times 19} - \frac{7 \times 13}{19 \times 13} = \frac{171}{247} - \frac{91}{247} = \frac{171 - 91}{247} = \frac{80}{247}$. Oder $\frac{3}{4} - \frac{7}{11} = \frac{33 - 28}{44} = \frac{5}{44}$ u. s. f.

II. Soll ein ächter Bruch von einer ganzen Zahl subtrahirt werden, so borge man 1 von derselben, verwandle es in einen Bruch, welcher mit dem abzuziehenden gleichartig ist und ziehe letztern davon ab. So ist z. B. $8 - \frac{7}{9} = 7\frac{9}{9} - \frac{7}{9} = 7\frac{2}{9}$. Ferner $12 - \frac{8}{15} = 11\frac{15}{15} - \frac{8}{15} = 11\frac{7}{15}$, oder $1 - \frac{9}{13} = \frac{13}{13} - \frac{9}{13} = \frac{4}{13}$ u. s. f.

Enthält aber der abzuziehende Bruch ein Ganzes oder mehrere und vielleicht noch Bruchtheile darüber, so bestimme man zuerst diese Ganze und verfahre dann auf ähnliche Weise. So ist $12 - \frac{15}{3} = 12 - 5 = 7$, oder auch $23 - \frac{24}{3} = 23 - 8 = 15$. Ferner $18 - \frac{17}{5} = 18 - 3\frac{2}{5} = 15 - \frac{2}{5} = 14\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = 14\frac{3}{5}$; oder $32 - \frac{28}{9} = 32 - 3\frac{1}{9}$

$= 29 - \frac{1}{9} = 28\frac{9}{9} - \frac{1}{9} = 28\frac{8}{9}$. Endlich

$10 - \frac{8}{8} = 10 - 1 = 9$ u. s. f.

III. Sollte eine ganze Zahl von einem Bruche abgezogen werden, so ist dieses nur dann (bis jetzt noch) möglich, wenn der ächte Bruch größer, als diese Zahl ist. Das Verfahren ergibt sich ganz einfach aus einigen Beyspielen. Es sey z. B. 8 von $\frac{138}{7}$ zu subtrahiren, so ist $\frac{148}{7} - 8 = 21\frac{1}{7} - 8 = 13\frac{1}{7}$. Ferner ist $\frac{354}{12} - 10 = 29\frac{6}{12} - 10 = 19\frac{6}{12} = 19\frac{1}{2}$ u. s. w.

§. 2.

Vermischte Zahlen zu subtrahiren.

I. Soll man von einer gemischten Zahl einen Bruch, oder von gemischten Zahlen wiederum gemischte Zahlen subtrahiren, so werden diese gemischte Zahlen eingerichtet und wie bisher behandelt. Z. B. $7\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{23}{3} - \frac{4}{5} = \frac{115 - 12}{15} = \frac{103}{15} = 6\frac{13}{15}$.

Auch hätte man hier, da $\frac{4}{5}$ ein ächter Bruch ist, so rechnen können: $7\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = 6\frac{5}{5} + \frac{2}{3} - \frac{4}{5}$

$= 6\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = 6\frac{13}{15}$. Ferner ist $12\frac{7}{8} - 3\frac{4}{9}$

$= \frac{103}{8} - \frac{31}{9} = \frac{103 \times 9 - 31 \times 8}{8 \times 9} = \frac{927 - 248}{72}$

$= \frac{679}{72} = 9\frac{31}{72}$. Da $\frac{4}{9}$ kleiner als $\frac{7}{8}$ ist, so hätte

man auch bequemer so rechnen können: $12\frac{7}{8} - 3$

$\frac{4}{9} = 12 - 3 + \left(\frac{7}{8} - \frac{4}{9}\right) = 9 + \left(\frac{63 - 32}{72}\right)$

$= 9\frac{31}{72}$ wie vorhin.

II. Es ist zu rathen, daß man zuerst die zwey gegebenen Brüche unter einerley Benennung bringt, um zu finden, wer der größere ist. Weiß man dieses, so kann die bequemste Rechnungsweise erst gewählt werden. So ist z. B. $23\frac{12}{41} - 15\frac{25}{36} = 23 - 15 +$

$\left(\frac{12}{41} - \frac{25}{36}\right) = 8 + \frac{422}{1476} - \frac{1025}{1476} = 7 + \frac{1476}{1476}$

$+ \frac{422}{1476} - \frac{1025}{1476} = 7 + \frac{1898}{1476} - \frac{1025}{1476} = 7$

$\frac{873}{1476} = 7\frac{291}{492}$.

§. 3.

Subtraction gemeiner Brüche durch Decimalbrüche.

I. Auf ähnliche Weise, wie man gemeine Brüche zuerst in Decimalbrüche verwandeln und dann addiren kann, lassen sich auch solche Brüche, nachdem sie in

zehntheilige umgewandelt sind, bequem subtrahiren, wie folgende Beyspiele zeigen, deren Richtigkeit aus den bisherigen Sätzen genugsam erhellet.

Es sey $\frac{5}{8} - \frac{1}{4}$ zu finden, so ist

$\frac{5}{8} = 0{,}625$ und

$\frac{1}{4} = 0{,}25$ folglich wird

$\frac{5}{8} - \frac{1}{4} = 0{,}375$ Rest.

Eine Probe ließ sich so anstellen $\frac{5}{8} - \frac{1}{4} =$

$\frac{20 - 8}{32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} = 0{,}375$ wie vorhin.

Ferner $\frac{17}{3} - \frac{28}{9}$. Hier ist

$\frac{17}{3} = 5{,}66666\ldots$ und

$\frac{28}{9} = 3{,}11111\ldots$ folglich auch

$\frac{17}{3} - \frac{28}{9} = 2{,}55555\ldots$

Oder $13\frac{25}{31} - 7\frac{14}{15}$. Hier ist

$13\frac{25}{31} = 13{,}806451$ und

$7\frac{14}{15} = 7{,}933333\ldots$

$13\frac{25}{31} - 7\frac{14}{15} - 5{,}873118\ldots$

Auf gleiche Weise ist

$\frac{7}{12} - \frac{4}{15} = 0{,}58333\ldots - 0{,}26666\ldots = 0{,}31667\ldots$

Oder: $8 - \frac{157}{28} = 8 - 5{,}60714\ldots = 2{,}39286\ldots$

Endlich: $216\ \frac{8}{11} - 87\ \frac{7}{15} = 126{,}727272\ldots -$
$87{,}466666\ldots = 39{,}260606\ldots$

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Wie müssen die zu subtrahirenden Brüche beschaffen seyn? Wie zieht man gleichartige Brüche von einander ab? Wie ungleichartige? Was ist der Grund dieses Verfahrens? Wie subtrahirt man einen ächten oder unächten Bruch von einer ganzen Zahl, und umgekehrt? (§. 1.)

II. Was nennt man vermischte Zahlen und wie werden sie subtrahirt? Welche Fälle haben im Besondern hierbey statt? Was ist der Grund dieses Verfahrens? (§. 2.)

III. Wie können gemeine Brüche dadurch subtrahirt werden, daß man sie in Decimalbrüche verwandelt? Worauf beruht dieses Verfahren? (§. 3.)

IV. Lehrübung.

Die Multiplication in gemeinen Brüchen.

§. 1.

Brüche mit ganzen Zahlen und umgekehrt zu multipliciren.

I. Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so wird dessen Zähler entweder

mit ihr multiplicirt, oder dessen Nenner durch sie dividirt. Die Richtigkeit ist aus dem Obigen (I. Lehrübung, §. 4) deutlich.

So wird z. B. $\frac{7}{8} \times 10 = \frac{70}{8} = 8\ \frac{6}{8} = 8\ \frac{3}{4}$.

Ferner ist $\frac{15}{31} \times 8 = \frac{120}{31} = 3\ \frac{27}{31}$. Oder $\frac{7}{12} \times 3 = \frac{7}{4} = 1\ \frac{3}{4}$; Endlich $\frac{9}{24} \times 8 = \frac{9}{3} = 3$ u. s. w.

II. Wenn die ganze Zahl in des Bruches Nenner ohne Rest enthalten ist, so wird es in der Regel vorzuziehen seyn, den Nenner mit ihr zu dividiren, da der neue Bruch in kleinern Zahlen ausgedrückt wird. Durch jede der beyden Auflösungen entsteht aber dasselbige Product. So ist z. B. $\frac{7}{24} \times 8$ entweder $= \frac{56}{24}$ oder $= \frac{7}{3}$, woraus immer $2\ \frac{1}{3}$ entsteht.

Da gleiche Factoren immer einerley Product geben, so ist auch z. B. $5\frac{1}{3} \times \frac{8}{13} = \frac{8}{13} \times 5 = \frac{40}{13} = 3\ \frac{1}{13}$ u. s. w.

§. 2.

Brüche durch Brüche, auch gemischte Zahlen mit einander zu multipliciren.

I. Soll ein Bruch mit einem Bruche multiplicirt werden, so bildet das Product beyder Zähler den Zähler und das Product beyder Nenner den Nenner des neuen Bruchs. So ist z. B. $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$. Der

Grund ist dieser. Es heißt $\frac{4}{5}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren soviel, als $\frac{4}{5}$ soll $\frac{2}{3}$ mal genommen werden, oder von $\frac{4}{5}$ soll man den 3ten Theil 2 mal nehmen. Es ist aber der 3te Theil von $\frac{4}{5}$ offenbar $= \frac{4}{5 \times 3}$ und diesen 2 mal genommen, gibt $\frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$.

Oder: $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ heißt soviel, als $\frac{4}{5}$ mit 2 multipliciren und das Product wiederum durch 3 dividiren, da $\frac{2}{3}$ soviel als 2 : 3 ist.

Oder: $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ heißt soviel, als $\frac{4}{5}$ mit 2 mal $\frac{1}{3}$ multipliciren. Aber $\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ von $\frac{4}{5}$ oder $\frac{4}{15}$. Daher muß dieses $\frac{4}{15}$ nun noch 2 mal genommen werden, was zum Producte $\frac{8}{15}$ gibt.

II. Wenn beyde Factoren ächte Brüche sind, so wird das Product kleiner, als jeder seiner Factoren. Denn es heißt z. B. $\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$ soviel, als von $\frac{5}{7}$ soll man $\frac{3}{4}$ (folglich nur ein Stück) oder von $\frac{3}{4}$ soll man $\frac{5}{7}$ (also wieder ein Stück) nehmen. Das Product gibt $\frac{15}{28}$, welches kleiner als $\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$ und kleiner als

$\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$ ist. Die Multiplication mit einem ächten Bruche ist daher eine wahre Division.

Auch läßt sich nunmehr die Multiplication mit gemischten Zahlen leicht ausführen. Es ist nämlich

$$12\frac{2}{3} \times 5\frac{4}{9} = \frac{38}{3} \times \frac{49}{9} = \frac{38 \times 49}{3 \times 9} = \frac{1862}{27}$$

$$= 68\frac{26}{27}.$$

Auch könnte man so rechnen $12\frac{2}{3} \times 5\frac{4}{9} =$

$$12 \times 5 + \frac{2}{3} \times 5 + \frac{4}{9} \times 12 + \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} =$$

$$60 + \frac{10}{3} + \frac{48}{9} + \frac{8}{27} = 60 + \frac{90 + 144 + 8}{27}$$

$$= 60 + \frac{242}{27} = 60 + 8\frac{26}{27} = 68\frac{26}{27}.$$

§. 3.

Reduction der, in benannten Zahlen gegebenen Brüche.

Aus dem Bisherigen ergibt sich die Richtigkeit nachfolgender Auflösungen:

I. Wie viele Kreuzer sind $\frac{3}{11}$ eines Gulden? Da

1 fl. = 60 kr. so sind $\frac{3}{11}$ fl. = $\frac{3 \times 60}{11}$ kr. = $\frac{180}{11}$ kr.

$= 16\frac{4}{11}$ kr. Allein, wie viele Pfennige sind $\frac{4}{11}$ kr.?

Da 4 pf. = 1 kr. so sind $\frac{4}{11}$ kr. = $\frac{4 \times 4}{11}$ pf. = $\frac{16}{11}$ pf.

= $1\frac{5}{11}$ pf. Daher sind $\frac{3}{11}$ fl. = 16 kr. $1\frac{5}{11}$ pf.

II. Wieviele Pfunde sind $\frac{7}{25}$ eines Centners? Da

1 Centn. = 100 Pf. so sind $\frac{7}{25}$ Cent. = $\frac{7 \times 100}{25}$ Pf.

= 7×4 Pf. $\left(\text{da } \frac{100}{25} = 4 \right)$ = 28 Pfunde.

III. Wieviele Lothe sind $\frac{28}{39}$ eines Pfundes? Da

1 Pf. = 32 L. so ist $\frac{28}{39}$ Pf. = $\frac{28 \times 32}{39}$ L. = $\frac{896}{39}$ L.

= 22 L. und $\frac{38}{39}$ L. oder $\frac{38 \times 4}{39}$ Quent. = $\frac{152}{39}$ Q.

= $3\frac{35}{39}$ Quentchen.

IV. Da (aus I.) $\frac{3}{11}$ fl. = $16\frac{4}{11}$ kr. so sind auch

$\frac{3}{11}$ fl. = 16,3636 . . . kr. Aus III. waren $\frac{28}{39}$ pf. =

$22\frac{38}{39}$ L. folglich wird auch $\frac{28}{39}$ pf. = 22,9743 .. vom Lothe.

V. Auch kann man fragen: Wieviele Zehntel des Gulden sind 9 kr.? Da 1 kr. = $\frac{1}{60}$ G. = 0,1666 . . .

kr. so sind 9 kr. = 0,01666 . . . × 9 = 0,14994 . . Gulden. Ferner: Wieviele Decimalbruchtheile des Pfundes sind 15 Lothe? Da 1 Pf. = 32 L. so ist 1 L.

$= \frac{1}{32}$ Pf. $= 0{,}03125$ Pf. Daher sind 15 Lothe $= 0{,}03125 \times 15 = 0{,}46875$ Pfunde.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Auf wievielerley Art läßt sich ein Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren? Welche Auflösung ist die vorzüglichste? Worauf beruhet dieses Verfahren? (§. 1.)

II. Wie wird ein gemeiner Bruch durch einen solchen Bruch multiplicirt? Grund dieses Verfahrens? Wann wird das Product kleiner, als jeder der Factoren? Wie multiplicirt man gemischte Zahlen miteinander? Grund dieses Verfahrens? (§. 2)

III. Wie verwandelt man Brüche höherer Wertharten in niedere Werthe? Wie drückt man niedere Werthe in Bruchtheilen höherer Wertharten aus? Wie drückt man eine Werthart in Decimalbruchtheilen einer andern aus? Worin liegt der Grund der Richtigkeit dieses Verfahrens? (§. 3.)

V. Lehrübung.

Die Division in gemeinen Brüchen.

§. 1.

Brüche mit Ganzen zu dividiren, und umgekehrt.

I. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man mit ihr in dessen Zähler dividirt oder dessen Nenner damit multiplicirt (I. Lehrüb. §. 4) da derselbe in beyden Fällen sovielmal kleiner wird, als jene ganze Zahl Einheiten enthält.

Es ist daher $\frac{7}{12} : 3 = \frac{7}{36}$. Da $\frac{1}{36}$ dreymal kleiner, als $\frac{1}{12}$ ist, so sind auch $\frac{7}{36}$ dreymal kleiner, als $\frac{7}{12}$. Ferner wird $\frac{15}{37} : 5 = \frac{3}{37}$. Wenn der Divisor in dem Zähler des Dividenden ohne Rest aufgeht, so ist jene Auflösung in der Regel der letztern vorzuziehen. Letztere aber kann jedesmal ausgeführt werden. In manchen Fällen finden beyde Auflösungen Statt. So ist z. B. $\frac{20}{96} : 4 = \frac{5}{24} = \frac{20}{384}$, welcher letztere Bruch, durch 4 gehoben, ebenfalls $\frac{5}{24}$ gibt.

II. Um eine ganze Zahl durch einen ächten Bruch zu dividiren, bemerke man, daß z. B. die Aufgabe $5 : \frac{1}{2}$ nichts anders heißt, als bestimmen, wie oft $\frac{1}{2}$ in 5 enthalten ist. Da nun 1 in 5 gerade 5mal enthalten und $\frac{1}{2}$ die Hälfte von 1 ist, so muß $\frac{1}{2}$ in 5 genau noch einmal so oft, d. h. 10mal enthalten seyn. Daher ist auch $5 : \frac{1}{2} = 5 \times \frac{2}{1} = 10$.

Auf gleiche Art ist $5 : \frac{1}{3} = 5 \times \frac{3}{1} = 15$; ferner $5 : \frac{1}{4} = 20$ u. s. w.

Sollte nun 8 durch $\frac{3}{7}$ dividirt werden, so wäre $8 : \frac{1}{7} = 8 \times 7 = 56$. Da aber $\frac{3}{7}$ soviel, als 3mal $\frac{1}{7}$ ist, so muß der Quotient wieder 3mal kleiner werden, welches dadurch geschieht, daß man $\frac{56}{3}$ setzt. Daher ist $8 : \frac{3}{7} = 8 \times \frac{7}{3} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$.

III. Hieraus entspringt die Regel: Eine ganze Zahl wird mit einem Bruche dividirt, wenn man ihn umkehrt (d. h. Zähler zum Nenner und Nenner zum Zähler macht) und nun mit derselben multiplicirt.

Ist der Divisor ein ächter Bruch, so tritt der, bey ganzen Zahlen nie stattfindende Fall ein, daß der Quotient größer, als der Dividend wird. Z. B. $9 : \frac{3}{4} = 9 \times \frac{4}{3} = \frac{36}{3} = 12$, welches größer, als 9 ist.

IV. Die Richtigkeit der vorhin bemerkten Regel läßt sich auch auf folgende Weise erkennen. Es sey die Aufgabe: $15 : \frac{3}{7}$ so wird, wenn man 15 durch 3 dividirte, der Quotient $\frac{15}{3}$ offenbar, 7 mal zu klein seyn, da man 15 durch den 7ten Theil von 3 dividiren sollte.

Daher muß $\frac{15}{3}$ wieder mit 7 multiplicirt werden, welches $\frac{15}{3} \times 7$ oder auch $15 \times \frac{7}{3}$ gleich ist.

§. 2.

Brüche durch Brüche, auch gemischte Zahlen durch einander zu diviren.

I. Um einen Bruch durch einen Bruch zu dividiren, kehre man den Divisor um und multiplicire nun beyde Brüche mit einander. So ist z. B. $\frac{7}{8} : \frac{5}{9} = \frac{7}{8} \times \frac{9}{5} = \frac{63}{40} = 1\frac{23}{40}$. Denn $\frac{7}{8} : \frac{5}{9} = \frac{7 \times 9}{8 \times 9} : \frac{5 \times 8}{9 \times 8} = 7 \times 9 : 5 \times 8$ (denn bey gleichen Nenner bestimmen die Zähler die Werthe der Brüche, folglich ist der Quotient beyder Zähler auch der Quotient der Brüche selbst) $= \frac{7 \times 9}{8 \times 5} = \frac{7}{8} \times \frac{9}{5}$.

Oder: $\frac{7}{8} : \frac{5}{9}$ heißt soviel, als $\frac{7}{8}$ mit dem 9ten Theil von 5 dividiren. Es ist aber $\frac{7}{8} : 5 = \frac{7}{8 \times 5}$. Da man hier mit 5 dividirt hat und nur mit dem 9ten Theil von 5 dividiren sollte, so muß der Quotient $\frac{7}{8 \times 5}$ wieder 9 mal größer werden, welches $\frac{7 \times 9}{8 \times 5}$ gibt.

Oder: $\frac{7}{8} : \frac{5}{9}$ ist soviel, als $\frac{7}{8}$ mit $\frac{1}{9}$ dividiren und diesen Quotienten 5 mal kleiner machen. Aber $\frac{7}{8} : \frac{1}{9} = \frac{7 \times 9}{8} = \frac{63}{8}$ und dieses 5 mal verkleinert, gibt $\frac{63}{8 \times 5} = \frac{63}{40}$ wie vorhin.

II. Um gemischte Zahlen zu dividiren, richte man sie zuerst ein und verfahre nun nach der bekannten Regel. Z. B. $5\frac{3}{11} : 8\frac{4}{7} = \frac{58}{11} : \frac{60}{7} = \frac{58 \times 7}{11 \times 60} = \frac{406}{660} = \frac{203}{330}$.

Ferner ist $10\frac{2}{9} : 3\frac{5}{8} = \frac{92}{9} : \frac{29}{8} = \frac{92 \times 8}{9 \times 29} = \frac{736}{261} = 2\frac{214}{261}$ u. s. f.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Auf wievielerley Art kann ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden. Worauf beruht dieses Verfahren? Welche Methode ist der Regel nach vorzuziehen? Wie wird eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt? Wann wird der Quotient größer, als der Divisor? (§. 1.).

II. Wie wird ein Bruch durch einen Bruch dividirt? Grund dieses Verfahrens, wenn die Brüche einerley Nenner und wenn sie verschiedene Nenner haben? Wie werden gemischte Zahlen durch einander dividirt? (§. 2.).

Siebenter Lehrgang.

Die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen.

I. Lehrübung.

Grundlehren von den arithmetischen und geometrischen Verhältnissen.

§. 1.

Grundbegriffe in Bezug auf das arithmetische und geometrische Verhältniß.

I. Die Vergleichung zweyer Zahlen, wodurch bestimmt wird, um wieviel die eine größer, als die andere ist, heißt ein arithmetisches Verhältniß dieser Zahlen; die Zahlen selbst werden die Glieder genannt, und die durch ihre Subtraction entstehende Zahl heißt Differenz oder Unterschied des Verhältnisses. Da dieses Verhältniß durch die Subtraction bestimmt wird, so ist auch — das Zeichen desselben und man sagt 12 — 7 drücke das arithmetische Verhältniß von 12 zu 7 aus. Man nennt 12 das erste Glied oder das Vorderglied; 7 aber das zweyte Glied oder das Hinterglied. Die Differenz oder der Unterschied ist hier 5. In 18 — 10 ist die Differenz = 8.

II. Die Vergleichung zweyer Zahlen, wodurch man bestimmt, wievielmal die eine größer als die andere ist, heißt ihr geometrisches Verhältniß; die Zahlen sind dessen Glieder und ihr Quotient heißt hier der Exponent des Verhältnisses. Weil dieser

durch die Division gefunden wird, so ist auch: das Zeichen des geometrischen Verhältnisses, und es drückt 30:6 das geometrische Verhältniß von 30 zu 6 aus, welches 5 zum Exponenten hat. Eben so ist in dem geometrischen Verhältnisse 7 : 15 der Exponent $= \frac{7}{15}$, weil man hier fragt, wie oft 15 in 7 enthalten ist.

III. Verhältnisse der Gleichheit heißen jene, in welchen beyde Glieder einander gleich sind; z. B. 10 — 10; 18 — 18 oder 7 : 7; 23 : 23 u. s. f. Verhältnisse der Ungleichheit haben ungleiche Glieder, z. B. 15 — 7; 11 — 20 oder 8 : 3; 7 : 31 u. s. f. Letztere sind entweder vom Größern zum Kleinern z. B. 20 — 12; 34 : 7, oder vom Kleinern zum Größern z. B. 5 — 13; 9 : 17.

Auch folgt aus diesen Erklärungen, daß die Glieder eines jeden Verhältnisses unter sich gleichartig seyn müssen, denn es haben z. B. 12 Pfunde zu 7 Gulden weder ein arithmetisches, noch ein geometrisches Verhältniß, indem sie weder eine Differenz, noch einen Quotienten bilden können.

§. 2.

Folgerungen für das arithmetische Verhältniß.

I. Im arithmetischen Verhältnisse der Gleichheit ist die Differenz $= 0$. Denn $8 - 8 = 0$; $12 - 12 = 0$ u. s. w.

II. Im arithmetischen Verhältnisse der Ungleichheit vom Größern zum Kleinern ist die Differenz des Verhältnisses dem gewöhnlichen Unterschiede seiner Glieder

gleich. In 10 — 3 ist sie = 7; in 18 — 5 ist sie 13 u. s. f.

III. Wäre das Verhältniß vom Kleinern zum Größern, z. B. 5 — 14, so könnte hier noch nicht die 14 von der 5 abgezogen werden und man müßte die Differenz 9 nun so bestimmen, daß man sagt: 14 ist um 9 größer, als 5. In einem der folgenden Lehrgänge aber werden wir das Größere vom Kleinern abzuziehen lernen.

IV. Das erste Glied eines arithmetischen Verhältnisses wird gefunden, wenn man das zweyte Glied zur Differenz addirt. So ist im Verhältnisse 17 — 9 = 8 das erste Glied 17 = 9 + 8.

V. Das zweyte Glied eines arithmetischen Verhältnisses findet man, wenn vom ersten die Differenz subtrahirt wird. Im vorigen Verhältnisse ist 9 = 17 — 8.

§. 3.

Folgerungen für das geometrische Verhältniß.

I. Im geometrischen Verhältnisse der Gleichheit ist der Exponent = 1. Z. B. 6 : 6 = 1; 24 : 24 = 1 u. s. f.

II. Im geometrischen Verhältnisse der Ungleichheit vom Größern zum Kleinern ist der Exponent entweder eine reine ganze Zahl oder eine vermischte Zahl; z. B. 48 : 16 = 3; 35 : 8 = $4\frac{3}{8}$.

III. Im geometrischen Verhältnisse der Ungleichheit vom Kleinern zum Größern ist der Exponent ein ächter Bruch; z. B. 11 : 18 = $\frac{11}{18}$.

IV. Das erste Glied eines geometrischen Verhältnisses wird durch ein Product aus dem zweyten Gliede in den Exponenten gefunden. In $21 : 7 = 3$ wird $21 = 7 \times 3$. In $7 : 12 = \frac{7}{12}$ wird $7 = 12 \times \frac{7}{12}$.

V. Das zweyte Glied eines geometrischen Verhältnisses wird gefunden, wenn man das erste durch den Exponenten dividirt. In $64 : 4 = 16$ ist $4 = 64 : 16$.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Was ist ein arithmethisches Verhältniß? Was sind dessen Glieder? Was ist die Differenz dieses Verhältnisses? Wie wird es bezeichnet? Was ist ein geometrisches Verhältniß? Was sind dessen Glieder? Was ist dessen Exponent? Was sind Verhältnisse der Gleichheit und der Ungleichheit vom Größern zum Kleinern und umgekehrt? Wie müssen die Glieder eines Verhältnisses beschaffen seyn? (§. 1.).

II. Welche Grundsätze gelten vom arithmetischen Verhältnisse? (§. 2.).

III. Welche Grundsätze gelten vom geometrischen Verhältnisse? (§. 3.).

II. Lehrübung.

Grundlehren von der arithmetischen Proportion.

§. 1.

Begriff der arithmetischen Proportion. Summe der äussern und innern Glieder.

I. Der Werth eines arithmetischen Verhältnisses hängt von der Differenz seiner Glieder ab. Der Werth des Verhältnisses 15 — 11 ist daher = 4. Wenn folglich zwey arithmetische Verhältnisse einerley Differenzen haben, so nennt man sie gleiche Verhältnisse. So ist z. B. das Verhältniß 11 — 7 dem Verhältnisse von 20 — 16 gleich, weil jedes derselben einen Werth = 4 hat. Allein 24 — 15 ist ein größeres Verhältniß, als 30 — 24, weil jenes 9, dieses aber nur 6 zum Unterschiede hat. Aus ähnlichem Grunde ist 5 — 12 kleiner, als 13 — 25, weil jenes 7, dieses aber 12 zum Werthe hat.

II. Wenn zwey gleiche arithmetische Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen mit einander verbunden werden, so entsteht eine arithmetische Proportion; z. B. 15 — 9 = 10 — 4 worin beyderseits der Unterschied = 6 ist. Man spricht diese Proportion so aus: 15 verhält sich zu 9, wie 10 sich zu 4 verhält, welches soviel heißt als. Gleichwie 15 um 6 größer als 9 ist, so ist auch 10 um 6 größer als 4; oder rückwärts: So wie 4 um 6 kleiner als 10 ist, so ist auch 9 um 6 kleiner als 15.

III. Jede arithmetische Proportion muß vier Glie-

der haben, welche man das erste, zweyte, dritte und vierte nennt und welche, in der angeführten Ordnung, 15, 9, 10 und 4 sind. Das Verhältniß 15 — 9 heißt das erste; 10 — 4 aber das zweyte Verhältniß; 15 und 10 sind die beyden Vorderglieder; 9 und 4 die zwey Hinterglieder. Das erste und vierte Glied nennt man die äussern, das zweyte und dritte die zwey innern oder mittlern Glieder.

IV. Eine der wichtigsten Eigenschaften der arithmetischen Proportion ist diese: Die Summe der beyden äussern Glieder ist der Summe der zwey mittlern gleich. Es sey z. B. $24 - 15 = 19 - 10$, so lehrt die wirkliche Rechnung, daß $24 + 10 = 15 + 19 = 34$ ist, der Grund davon ist folgender.

Da (nach I. Lehrüb. §. 2) $24 = 15 + 9$ und $19 = 10 + 9$ ist, so kann man aus der gegebenen Proportion folgende bilden: $(15 + 9) - 15 = (10 + 5) - 10$, worin die Summe der äussern Glieder $= 15 + 9 + 10$, jene der innern $= 15 + 10 + 9$ ist und mit jener aus den nämlichen Zahlen besteht, und folglich auch ihr gleich seyn muß.

V. Im Allgemeinen kann dieses auch so bewiesen werden. Das 1. Glied jeder arithmetischen Proportion ist immer die Summe aus dem 2. Gliede und aus dem Unterschiede; das 3. Glied aber immer eine Summe aus dem 4. Gliede und aus dem nämlichen Unterschiede. Wenn man daher eine Summe vom 1. und 4. Gliede bildet, so enthält diese immer das 2. Glied, den Unterschied und das 4. Glied. Macht man aber die Summe aus dem 2. und 3. Gliede,

so besteht diese aus dem 2. Gliede aus dem 4. Gliede und aus demselbigen Unterschiede, und muß daher jener Summe gleich seyn, weil sie mit ihr aus den nämlichen Theilen besteht.

VI. Noch könnte folgender Beweis gegeben werden. Obige Proportion war $24 - 15 = 19 - 10$, welches auch soviel heißt, als 24 weniger 15 ist soviel als 19 weniger 10 d. h. diese Proportion stellt auch zwey gleiche Differenzen dar. Wenn man nun beyderseits zuerst 15 und dann 10 addirt, so müssen die hieraus entstehenden Summen (weil Gleiches zu Gleichem addirt wird) einander gleich seyn, dieses gibt:

$24 - 15 = 19 - 10$

$15 = 15$ addirt, gibt

$24 = 19 - 10 + 15$

$10 = 10$ addirt, gibt

$24 + 10 = 19 + 15.$

§. 2.

Andere Eigenschaften der arithmetischen Proportion.

I. Da der Unterschied ganzer Zahlen derselbige bleibt, wenn man zu ihnen beyden die nämliche Zahl addirt oder von beyden dieselbige Zahl subtrahirt, so kann ein gegebenes arithmetisches Verhältniß auf unzählige Arten andere Glieder erhalten, ohne seinen Werth zu verändern. Es ist z. B. $24 - 15 = (24 + 2) - (15 + 2) = 26 - 17$; Oder: $24 - 15 = (24 + 10) - (15 + 10) = 34 - 25$; Oder $24 - 15 = (24 + 18) - (15 + 18) = 42 - 33$ u. s. f. Ferner auch $24 - 15 = (24 - 4)$

— (15 — 4) = 20 — 11; Oder 24 — 15 = (24 — 13) — (15 — 13) = 11 — 2 u. s. w.

Daher kann auch eine gegebene arithmetrische Proportion auf unzählige Art andere Glieder erhalten, ohne daß sie in ihrem Werthe verändert wird. Aus 18 — 15 = 24 — 21 werden daher folgende, welche theils durch Addition, theils durch Subtraction, auf vorbemerkte Weise, entstehen.

22 — 19 = 26 — 23
28 — 25 = 30 — 27
16 — 13 = 20 — 17
10 — 7 = 14 — 11
6 — 3 = 34 — 31
36 — 33 = 14 — 11 u. s. f.

II. Auch muß sich in jeder arithmetrischen Proportion das erste Glied so zu dem dritten verhalten, wie sich das zweyte Glied zu dem vierten verhält. Es sey die Proportion 23 — 19 = 12 — 8, so ist 4 die gemeinsame Differenz und man kann sie in diese verwandeln: (19 + 4) — 19 = (8 + 4) — 8. Setzt man nun hier (19 + 4) — (8 + 4) = 19 — 8, so müssen diese vier Zahlen eine Proportion bilden, da das Verhältniß (19 + 4) — (8 + 4) aus dem Verhältnisse 9 — 8 dadurch entsteht, daß zu jedem Gliede die nämliche Zahl 4 addirt ist. Daher wird auch 23 — 12 = 19 — 8.

III. Man kann daher in einer gegebenen arithmetischen Proportion auch zum ersten und zum dritten Gliede, oder zum zweyten und zum vierten Gliede dieselbige Zahl addiren, oder auch von eben diesen Gliedern die nämliche Zahl subtrahiren, ohne daß

die Proportionalität der Glieder hierdurch gestört wird. Aus der Proportion 28 — 19 = 15 — 6 werden daher folgende entstehen:

28 — 15 = 19 — 6
32 — 19 = 19 — 6
28 — 22 = 15 — 9
20 — 19 = 7 — 6
28 — 17 = 15 — 4
32 — 23 = 15 — 6
28 — 19 = 21 — 12
20 — 11 = 15 — 6
28 — 19 = 10 — 1 u. s. f.

IV. Wenn zwey gleiche Summen gegeben sind, deren jede aus zwey Gliedern besteht, so kann man aus ihnen eine Proportion bilden, wovon die zwey Zahlen der einen Summe, die beyden innern Glieder; die beyden Zahlen der andern Summe aber die zwey äussern Glieder bilden. Es sey z. B. $18+9=20+7$, so gibt dieses folgende 8 Proportionen:

1) 18 — 20 = 7 — 9
2) 18 — 7 = 20 — 9
3) 9 — 20 = 7 — 18
4) 9 — 7 = 20 — 18
5) 20 — 18 = 9 — 7
6) 20 — 9 = 18 — 7
7) 7 — 18 = 9 — 20
8) 7 — 9 = 18 — 20, wovon die 1te, 3te, 5te und 7te die umgekehrte von der 4ten, 2ten, 8ten, 6ten, ist.

Der Grund dieser Proportionen liegt in folgender Rechnung:

$18 + 9 = 20 + 7$

$9 = 9$ beyderseits subtrahirt

$18 = 20 + 7 - 9$

$7 = 7$ beyderseits subtrahirt

$18 - 7 = 20 - 9$ aus welcher Proportion nun alle übrigen folgen.

V. Wenn die gleichnamigen Glieder mehrerer arithmetischen Proportionen zusammen addirt, oder von einander subtrahirt werden, so bilden die entstehenden Summen oder Differenzen wiederum eine Proportion. Es sey

$18 - 12 = 10 - 4$ und

$11 - 9 = 7 - 5$, so ist auch

$29 - 21 = 17 - 9.$

Denn wenn 18 um 6 größer als 12 und 11 um 2 größer als 9 ist, so muß auch $18 + 11$ oder 29 um $6 + 2$ oder um 8 größer als $12 + 9$ oder als 21 seyn. Eben dieses gilt von $10 + 7$ in Bezug auf $4 + 5$. Der Unterschied des neuen Verhältnisses ist also hier der Summe der Differenzen der gegebenen Verhältnisse gleich.

Für $26 - 15 = 18 - 7$ und

$19 - 13 = 8 - 2$ ist ferner

$7 - 2 = 10 - 5$, welches auf ähnliche Art erwiesen wird. Hier ist die Differenz der neuen Proportion dem Unterschiede der Differenzen der beyden gegebenen gleich.

§. 3.

Ein fehlendes Proportionalglied zu finden. Steige arithmetische Proportionen.

I. Aus den bisherigen Eigenschaften der arithmetischen Proportionen geht nun auch die Auflösung der Aufgabe hervor: Zu drey gegebenen Gliedern ein viertes Proportionalglied zu finden. Es sey z. B. $30 - 19 = 24 - x$, wo x das fehlende vierte Glied bedeutet, so ist klar, daß $19 + 24 = 30 + x$ und folglich $x = 19 + 24 - 30 = 43 - 30 = 13$ seyn muß. Denn wenn man eine Summe kennt und einen Theil derselben, so muß der andere bekannt werden, wenn man diesen einen Theil von jener Summe abzieht. Daher ist $30 - 19 = 24 - 13$.

Wäre die Proportion diese $7 - 13 = x - 24$, so würde $7 + 24 = 13 + x$ und $x = 7 + 24 - 13 = 31 - 13 = 18$ seyn. Daher ist $7 - 13 = 18 - 24$.

In $28 - x = 15 - 24$ wird $28 + 24 = x + 15$, folglich $x = 28 + 24 - 15 = 52 - 15 = 37$ und man hat $28 - 37 = 15 - 24$.

Aus $x - 17 = 13 - 24$ würde $x + 24 = 17 + 13 = 30$; folglich $x = 30 - 24 = 6$ und es wäre nun $6 - 17 = 13 - 24$.

II. Hieraus entsteht die allgemeine Regel: Wenn das fehlende Glied ein äusseres ist, so ziehe man von der Summe der beyden mittlern das eine äussere ab; ist aber das fehlende ein inneres Glied, so subtrahire man von der Summe der äussern Glieder das gegebene innere, und die Differenz wird immer das fehlende Glied seyn.

III. Wenn in einer arithmetischen Proportion die beyden innern Glieder einander gleich sind, so heißt sie eine stetige arithmetische Proportion und dieses mittlere Glied wird die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen dem ersten und vierten Gliede genennt. Z. B. in $8 - 12 = 12 - 16$ oder in $3 - 10 = 10 - 17$ ist 12 die mittl. Proportionalzahl zwischen 8 und 16; 10 aber jene zwischen 3 und 17.

Hieraus folgt, daß in jeder solchen arithmetischen Proportion die Summe der äussern Glieder dem doppelten mittlern Gliede gleich ist. Denn $8 + 16 = 12 + 12 = 2 \times 12$; $3 + 17 = 10 + 10 = 2 \times 10$.

IV. Soll daher zwischen zwey gegebenen Zahlen eine mittlere arithmetische Proportinalzahl gefunden werden, so addire man sie zusammen und halbire ihre Summe, so ist die hierdurch entstehende Zahl die zu findende. Es seyen 11 und 47 die gegebenen äussern Glieder und x das mittlere so wird $x = \frac{11 + 47}{2}$

$= \frac{58}{2} = 29$ und man hat $11 - 29 = 29 - 47$, worin 18 die Differenz ist. Denn es muß hier $11 - x = x - 47$ seyn, woraus $2x = 11 + 47$ und folglich $x = \frac{11 + 47}{2}$ wird.

Wären die äussern Glieder 12 und 31, so würde $x = \frac{12 + 31}{2} = \frac{43}{2} = 21\frac{1}{2}$ und es ist demnach $12 - 21\frac{1}{2} = 21\frac{1}{2} - 31$, worin die Differenz

$= 9\frac{1}{2}$. Sind die beyden äusseren Glieder gerade oder beyde ungerade Zahlen, so wird das zufindende mittlere Glied jedesmal eine reine ganze Zahl; ist aber das eine äussere Glied eine gerade, das andere eine ungerade Zahl, so wird das Mittelglied eine ganze Zahl nebst $\frac{1}{2}$.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Was bestimmt den Werth eines arithmetischen Verhältnisses? Wann sind diese Verhältnisse gleich und ungleich? Was ist eine arithmetische Proportion? Wie nennt man ihre Glieder? Wie heißt eine ihrer wichtigsten Eigenschaften? Grund dieser Eigenschaft? (§. 1.)

II. Wodurch wird der Werth eines arithmetischen Verhältnisses nicht verändert? Veränderung der Glieder einer arithmetischen Proportion mit Beybehaltung ihrer Proportionalität? Wie verhält sich das 1te Glied zum 3ten? Welche Folgerungen ergeben sich hieraus? Welche Proportionen lassen sich aus gleichen Summen bilden? Warum sind die Summen gleichnamiger Proportionsglieder proportional? (§. 2.)

III. Wie findet man zu drey gegebenen Zahlen ein viertes fehlendes proportionales Glied? Grund dieses Verfahrens? Wie wird zu zwey Zahlen eine mittlere arithmetische Proportionalzahl gefunden? Grund dieses Verfahrens? (§. 3.)

III. Lehrübung.

Grundlehren von der geometrischen Proportionen.

§. 1.

Begriff der geometrischen Proportionen. Product aus den äussern und innern Gliedern.

I. Der Werth eines geometrischen Verhältnisses hängt nicht von der Größe seiner Glieder, sondern von jener seines Exponenten ab. So ist z. B. der Werth des Verhältnisses 24 : 8 der Exponent 3; oder von 3 : 7 ist derselbe $\frac{3}{7}$. Wenn daher zwey geometrische Verhältnisse einerley Exponenten haben, so nennt man sie gleiche Verhältnisse. So ist z. B. 27 : 9 dem Verhältnisse 30 : 10 gleich, weil jedes einen Werth = 3 hat. Ferner ist das Verhältniß 48 : 6 größer als 20 : 5, weil in jenem der Exponent = 8, in diesem aber = 4 ist.

II. Wenn zwey gleiche geometrische Verhältnisse durch das Zeichen der Gleichheit mit einander verbunden werden, so entsteht hierdurch eine geometrische Proportion; z. B. 42 : 7 = 18 : 3, worin der Exponent = 6 ist. Man sagt: 42 verhält sich so zu 7 wie sich 18 zu 3 verhält; d. h. gleichwie 42 sechsmal größer als 7 ist, so ist auch 18 sechsmal größer als 3, oder umgekehrt: gleichwie 3 sechsmal kleiner als 18 ist, so ist auch 7 sechsmal kleiner als 42. — Die Anzahl und Benennung der Glieder hat diese Proportion mit der arithmetischen gemein.

III. Jede geometrische Proportion hat folgende Haupteigenschaft: Das Product aus den beyden äussern Gliedern ist dem Producte aus den mittlern gleich. Aus $3 : 15 = 7 : 35$ wird $3 \times 35 = 15 \times 7 = 105$. Der Grund hiervon ist folgender. Nach dem Obigen (I. Lehrüb. §. 3) ist $3 = 15 \times \frac{3}{15}$ und $7 = 35 \times \frac{7}{35}$. Da aber $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ und $\frac{7}{35} = \frac{1}{5}$ ist, so wird $3 = 15 \times \frac{1}{5}$ und $7 = 35 \times \frac{1}{5}$ und die Proportion ist diese: $15 \times \frac{1}{5} : 15 = 35 \times \frac{1}{5} : 35$. Bildet man hier das Product der äussern und innern Glieder, so ist $15 \times \frac{1}{5} \times 35 = 15 \times 35 \times \frac{1}{5}$, weil beyde Producte aus gleichen Factoren bestehen.

IV. Im Allgemeinen kann dieses auch folgendergestalt bewiesen werden. Da das 1te Glied jeder geometrischen Proportion ein Product aus dem 2ten Gliede in den Exponenten; das 3te Glied aber ein Product aus dem 4ten Gliede in eben diesen Exponenten ist, so besteht das Product aus den 1ten und 4ten Gliede aus den Factoren: 2tes Glied, Exponent und 4tes Glied; das Product der mittlern Glieder enthält aber die Factoren: 4tes Glied, Exponent und 2tes Glied, welches die nämlichen sind.

V. Ausserdem könnte man auch noch folgenden Beweis hiervon geben. Aus der Proportion $3 : 15 = 7 : 35$ folgt, daß die Quotienten $\frac{3}{15} = \frac{7}{35}$ sind.

Bringt man diese Brüche unter einerley Benennung, so ist $\frac{3 \times 35}{15 \times 35} = \frac{7 \times 15}{35 \times 15}$; folglich muß auch $3 \times 35 = 7 \times 15$ seyn, da gleiche Brüche von gleichen Nennern auch gleiche Zähler haben müssen.

§. 2.

Andere Eigenschaften der geometrischen Proportion.

I. Der Werth eines geometrischen Verhältnisses wird nicht verändert, wenn man dessen beyde Glieder mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt. Es sey 18 : 6 das Verhältniß, dessen Exponent = 3 ist, so wird auch $18 \times 4 : 6 \times 4 = 3$, oder $\frac{18}{2} : \frac{6}{2} = 3$ seyn. Denn das Verhältniß 18 : 6 ist dem Bruche $\frac{18}{6}$ gleich und der Werth eines Bruchs bleibt unverändert, wenn dessen Zähler und Nenner mit derselbigen Zahl multiplicirt oder dividirt wird.

Man kann daher jede geometrische Proportion in andere verwandeln, wenn man ihr 1tes und 2tes oder 3tes und 4tes Glied mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt. Die gegebene Proportion sey diese: 48 : 8 = 30 5, so entstehen folgende hieraus:

24 : 4 = 60 : 10,

6 : 1 = 15 : $2\frac{1}{2}$

480 : 80 = 120 : 20

16 : $2\frac{2}{3}$ = 6 : 1 u. s. f.

II. In jeder geometrischen Proportion verhält sich das erste Glied so zu dem dritten, wie sich das zweyte zu dem vierten verhält. Oder wenn $27 : 9 = 48 : 16$, so ist auch $27 : 48 = 9 : 16$. Denn, da in der gegebenen Proportion der Exponent 3 ist, so wird $27 = 9 \times 3$ und $48 = 16 \times 3$ und es muß $9 \times 3 : 16 \times 3 = 9 : 16$ seyn, weil ein Verhältniß nicht verändert wird wenn man seine zwey Glieder mit derselbigen Zahl multiplicirt.

Daher wird auch aus $5 : 75 = 8 : 120$ die Proportion $5 : 8 = 75 : 120$, worin, wie von selbst erhellet, der Exponent ein anderer, als vorhin ist.

III. Da jedes geometrische Verhältniß die Bedeutung eines gemeinen Bruches hat, so gilt Alles, was früher vom Heben der Brüche gelehrt worden ist, nunmehr auch vom Heben der Glieder eines Verhältnisses. Man kann daher das erste und zweyte, das erste und dritte, das zweyte und vierte und das dritte und vierte Glied mit derselbigen Zahl heben, ohne daß die Proportion gestört wird. Daher heißen auch die hier genannten Glieder die verhältnißmäßigen; im Gegensatze vom ersten und vierten und vom zweyten und dritten, welche die unverhältnißmäßigen genennt werden. Es sey die Proportion diese: $40 : 8 = 70 : 14$, so ist auch $20 : 8 = 35 : 14$; ferner $20 : 4 = 35 : 7$ und $10 : 2 = 35 : 7$, auch $1 : 2 = 3, 5 : 7$ oder $1 : 2 = 0, 7 : \frac{7}{5}$ u. s. w.

IV. Hierauf beruht auch das Verfahren, ein in der Proportion befindliches Bruchglied in eine ganze Zahl zu verwandeln, ohne die Proportion zu stören.

Man darf nämlich nur mit dem weggelassenen Nenner dieses Bruchgliedes irgend ein ihm verhältnißmäßiges Glied multipliciren, wobey man immer unter zwey die Auswahl hat. Wäre die Proportion diese: $\frac{2}{3} : 6 = 8 : 72$, so erhielte man entweder hieraus: $2 : 6 \times 3 = 8 : 72$ d. h. $2 : 18 = 8 : 72$, oder $2 : 6 = 8 \times 3 : 72$ d. h. $2 : 6 = 24 : 72$. Aus der Proportion: $\frac{4}{5} : \frac{6}{11} = 10 : 6\ \frac{9}{11}$ entsteht diese:

$4 \times 11 : 6 \times 5 = 10 : 6\ \frac{9}{11}$ oder $44 : 30 = 10 : 6\ \frac{9}{11}$ d. h. $44 : 30 = 10 : \frac{75}{11}$ folglich $44 : 30 = 110 : 75$ u. s. w.

V. Wenn zwey oder mehrere Proportionen gegeben sind, und man multiplicirt alle erste Glieder mit einander, eben so alle zweyte, alle dritte und alle vierte, so bilden auch Producte wiederum eine Proportion, welche man eine zusammengesetzte heißt und worin der Exponent dem Producte aus den Exponenten der gegebenen Proportionen gleich ist. Es seyen gegeben die Proportionen:

$18 : 3 = 54 : 9$ und
$8 : 4 = 10 : 5$, so ist auch

$144 : 12 = 540 : 45$.

Denn aus der ersten folget $\frac{18}{3} = \frac{54}{9}$ und aus der zweyten $\frac{8}{4} = \frac{10}{5}$; folglich ist auch $\frac{18 \times 8}{3 \times 4} =$

$\frac{54 \times 10}{9 \times 5}$ d. h. $\frac{144}{12} = \frac{540}{45}$, welches 144 : 12 = 540 : 45 gibt. Da ferner $\frac{18}{3} = 6$ und $\frac{8}{4} = 2$ ist, so muß auch $\frac{18}{3} \times \frac{8}{4} = 6 \times 2 = 12$ seyn.

Auf gleiche Weise könnten auch noch mehrere Proportionen gegeben seyn, um sie in eine einzige zusammenzusetzen.

Wenn zwey Proportionen gegeben sind, so bilden auch die Quotienten ihrer gleichnamigen Glieder wiederum eine neue Proportion, was man auf ähnliche Art nachweisen kann.

§. 3.

Ein fehlendes geometrisches Proportionalglied zu finden. Stetige geometrische Proportion.

I. Wenn nachstehende Proportion gegeben ist, $30 : 6 = 45 : x$, worin x das fehlende Glied bedeutet, welches gefunden werden soll, so ist $6 \times 45 = 30 \times x$, oder 270 ist das 30fache des unbekannten x. Folglich muß $\frac{270}{30} = 9 \times x$ seyn, und die Proportion ist diese: $30 : 6 = 45 : 9$. Denn wenn man ein, aus zwey Factoren bestehendes Product mit dem einen Factor dividirt, so muß der andere Factor herauskommen.

In $15 : 5 = x : 3$ würde $15 \times 3 = 5 \times x$; folglich $\frac{45}{5} = x = 9$ und es ist $15 : 5 = 9 : 3$.

Wäre $24 : x = 72 : 9$, so würde $x = \frac{24 \times 9}{72}$

$= \frac{216}{72} = 3$ und es ist $24 : 3 = 72 : 9$.

In $x : 30 = 15 : 75$ wird $x = \frac{30 \times 15}{75} = \frac{450}{75} = 6$.

Daher ist $6 : 30 = 15 : 75$.

II. Hieraus entsteht die allgemeine Regel: Wenn in einer geometrischen Proportion ein äusseres Glied fehlt, so dividire man das Product aus den mittlern durch das vorhandene äussere; fehlt aber ein mittleres, so wird das Product der äussern durch das gegebene mittlere dividirt.

Vorstehende Aufgabe heißt auch: Zu drey gegebenen Gliedern eine vierte geometrische Proportionalzahl zu finden.

III. Wenn in einer geometrischen Proportion die zwey mittlern Glieder einander gleich sind, so heißt sie eine stetige geometrische Proportion z. B. $5 : 35 = 35 : 247$ oder $48 : 12 = 12 : 3$ und man nennt dieses mittlere Glied die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen dem ersten und vierten Gliede.

Weil in dieser stetigen Proportion das Product der beyden äussern Glieder dem Producte des mittlern in sich selbst gleich ist, und man ein solches Product das Quadrat dieses Gliedes nennt (wie weiter unten ausführlicher erklärt werden wird), so ist hier das Product der äussern Glieder dem Quadrate des mittlern Gliedes gleich. Wie man zwischen zwey

äussern Gliedern eine mittlere geometrische Proportionalzahl finden könne, setzt die Lehre von Ausziehung der Quadratwurzel voraus, welche erst weiter unten (im XI. Lehrgange) entwickelt wird.

§. 4.

Weitere Eigenschaften der geometrischen Proportionen.

I. Wenn zwey gleiche Producte, deren jedes aus zwey Factoren besteht, gegeben sind, so läßt sich aus ihnen eine Proportion bilden, worin irgend zwey dieser Factoren die innern Glieder und die beyden andern die äussern Glieder bilden. Aus $6 \times 8 = 4 \times 12$ entstehen folgende Proportionen:

6 : 4 = 12 : 8 oder
6 : 12 = 4 : 8 oder
8 : 12 = 4 : 6 oder
8 : 4 = 12 : 6 oder
4 : 6 = 8 : 12 oder
4 : 8 = 6 : 12 oder
12 : 6 = 8 : 4 oder
12 : 8 = 6 : 4

wovon vier jedesmal die umgekehrten der vier andern sind.

II. In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe oder Differenz aus dem ersten und zweyten Gliede so zu dem ersten oder zweyten, wie sich die Summe oder Differenz aus dem dritten und vierten Gliede zum dritten oder vierten verhält. Oder, wenn 18 : 3 = 24 : 4 ist, so wird

18 + 3 : 18 = 24 + 4 : 24, oder
18 + 3 : 3 = 24 + 4 : 4, oder
18 — 3 : 18 = 24 — 4 : 24, oder
18 — 3 : 3 = 24 — 4 : 4

da nämlich 18 = 6 x 3 und 24 = 6 x 4 ist, so muß auch

6 x 3 : 18 = 6 x 4 : 24 oder
6 x 3 : 6 x 4 = 18 : 24 seyn. Allein
6 x 3 : 6 x 4 = 7 x 3 : 7 x 4, also
auch 7 x 3 : 7 x 4 = 18 : 24, oder
7 x 3 : 18 = 7 x 4 : 24 d. h.
21 : 18 = 28 : 24, welches die erste der oben bemerkten neugebildeten vier Proportionen ist. Die Richtigkeit der drey übrigen wird auf ähnliche Art abgeleitet.

III. Auch ist folgender Satz hierdurch verständlich: Die Summe oder Differenz aus dem ersten uud dritten Gliede verhält sich so zu diesem ersten oder dritten, wie sich die Summe oder Differenz aus dem zweyten und vierten Gliede zu diesem zweyten oder vierten verhält. Es sey z. B. 60 : 15 = 24 : 6, so ist auch

60 + 24 : 60 = 15 + 6 : 15 oder
60 + 24 : 24 = 15 + 6 : 6 oder
60 — 24 : 60 = 15 — 6 : 15 oder
60 — 24 : 24 = 15 — 6 : 6

Denn wenn man aus der zuerst gegebenen Proportion: 60 : 15 = 24 : 6 diese: 60 : 24 = 15 : 6 bildet, so ergibt sich die Richtigkeit der übrigen unmittelbar aus dem Vorhergehenden.

IV. Wenn folgende Proportionen angegeben sind:

15 : 3 = 84 : x und
12 : 4 = x : y und
26 : 2 = y : z, worin die Buchstaben x, y und z Zahlen bedeuten, welche noch unbekannt sind, so wird der Werth von z dadurch gefunden, daß man die gleichnamigen Glieder derselben miteinander multiplicirt, wodurch die zusammengesetzte Proportion:

$15 \times 12 \times 26 : 3 \times 4 \times 2 = 84 \times x \times y : x \times y \times z$.

Oder $4680 : 24 = 84 \times x \times y : x \times y \times z$ entsteht, deren zweytes Verhältniß, mit $x \times y$ gehoben, folgende Proportion gibt, $4680 : 24 = 84 : z$, worin nun $z = \frac{24 \times 84}{4680} = \frac{2016}{4680} = 0{,}4307 \ldots$

§. 5.

Uebungs-Fragen.

I. Was bestimmt den Werth eines geometrischen Verhältnisses? Wann sind solche Verhältnisse gleich oder ungleich? Was ist eine geometrische Proportion? Wie heißt eine Haupteigenschaft von ihr? Grund derselben? (§. 1.).

II. Wodurch bleibt der Werth eines geometrischen Verhältnisses unverändert? Wie verhält sich in einer geometrischen Proportion das 1te Glied zum 3ten? Wie werden Verhältnisse gehoben? Was sind verhältnißmäßige und unverhältnißmäßige Glieder? Wie schafft man Bruchglieder in der Proportion hinweg? Was nennt man eine zusammengesetzte Proportion? Wie findet man den Exponenten in derselben? (§. 2.).

III. Wie findet man in einer geometrischen Proportion aus drey gegebenen Gliedern ein fehlendes viertes? Grund

dieses Verfahrens? Was ist eine stetige geometrische Proportion? Wem ist hier das Product der äussern Glieder gleich? (§. 3.).

IV. Wie kann man aus zwey gleichen Producten mehrere geometrische Proportionen bilden? Welche Proportionen entstehen durch die Summen oder Differenzen der Glieder einer gegebenen Proportion? (§. 4.).

Achter Lehrgang.

Practische Anwendung der Proportionslehre.

I. Lehrübung.

Die einfache Regel Detri.

§. 1.

Erklärung und Grund derselben.

I. Die einfache Regel Detri ist eine Anweisung, aus drey gegebenen benannten Zahlen, wovon zwey unter sich gleichartig sind und deren dritte mit einer zu findenden vierten von einerley Art ist, diese vierte durch Rechnung zu finden; z. B. Was kosten 15 Pfunde von einer gewissen Waare, wenn 7 Pfunde 23 Gulden kosten? Hier sind die 15 Pf. mit den gegebenen 7 Pf. gleichartig und die gegebenen 23 fl. mit der zufindenden Zahl von Gulden ebenfalls.

II. Der Grund der Regel Detri beruhet darauf, daß die, im gemeinen Leben vorkommenden benannten Zahlen sehr häufig geometrische Verhältnisse bilden.

Es ist dieses z. B. bey der Menge der Waaren und bey ihrem Preise der Fall; denn wer von derselbigen Waare z. B. 8mal soviel kauft, muß auch den 8fachen Preis erlegen, und für $\frac{1}{3}$ des Geldes erhält man auch nur $\frac{1}{3}$ der Waare. — Auf gleiche Weise steht die Menge der Arbeiter und der Betrag ihres Taglohnes (unter übrigens gleichen Umständen) in einem solchen geometrischen Verhältnisse. Solche Verhältnisse, bey welchen die eine Größe sovielmal größer oder kleiner wird, als die mit ihr verbundene andere vermehrt oder vermindert wird, nennt man gerade Verhältnisse. — Wenn aber bey dem Größerwerden der einen die andere mit ihr in Verbindung stehende sovielmal verkleinert und bey dem Kleinerwerden jener Größe diese andere sovielmal vergrößert wird, so heißt dieses ein umgekehrtes oder verkehrtes Verhältniß. Es steht z. B. die Menge der Arbeiter, die man zur Vollendung eines gewissen Werkes braucht und die Zahl der Arbeitstage in einem umgekehrten Verhältnisse; denn bey zwey- drey- viermal soviel Arbeitstagen braucht man nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ der vorigen Anzahl von Arbeitern, und umgekehrt.

In welchen Fällen gerade und in welchen umgekehrte Verhältnisse Statt finden, geht aus der Natur dieser Verhältnisse von selbst schon hervor.

§. 2.

Auflösung der Regel Detri-Aufgaben.

Zur Ausflösung der Regel Detri-Aufgaben bemerke man folgende Regeln:

I. Man setze jene der drey gegebenen Zahlen, welche mit der zufindenden gleichartig ist, als drittes Glied einer Proportion;

II. Man bestimme aus der Natur der Frage, ob das zufindende vierte Glied größer oder kleiner, als das angegebene dritte werde, was sich jederzeit leicht wird beurtheilen lassen. In jenem Falle setze man die beyden noch angegebenen Zahlen als ein Verhältniß vom Kleinern zum Größern; in diesem aber als ein Verhältniß vom Größern zum Kleinern an.

III. Multiplicirt man nun die zwey mittlern Glieder und dividirt das Product durch das erste, so gibt der Quotient das fehlende vierte Glied.

Erläuterung und Beweis.

Da in der obigen Frage: Wenn 7 Pfunde 23 Gulden kosten was werden 15 Pfunde werth seyn? eine gewisse Menge von Gulden gesucht wird, so setze man, nach dem Gesetze der Gleichartigkeit, die gegebenen 23 fl. als drittes Glied, nämlich:

— : — = 23 fl. : x fl.

Da ferner wenn 7 Pf. 23 fl. kosten, die 15 Pf. offenbar mehr als 23 fl. kosten müßen, so wird x größer als 23 und das Verhältniß von 23 : x ist ein Verhältniß vom Kleinern zum Größern. Daher muß auch das erste Verhältniß vom Kleinern zum Größern seyn, und die Proportion ist diese:

7 Pf. : 15 Pf. = 23 fl. : x fl.

Das heißt: Sovielmal die 15 Pf. größer als die 7 Pf. sind, so vielmal mehr müßen sie auch als 23 fl. kosten, oder so vielmal muß x größer als 23 seyn, wie aus der Natur der Sache hervorgeht.

Daher ist nun $x = \frac{15 \times 23}{7} = \frac{345}{7} = 49\ \frac{2}{7}$

Gulden oder 49 fl. $\frac{2 \times 60}{7}$ kr. = 49 fl. $\frac{120}{7}$ kr. =

49 fl. 17 $\frac{1}{7}$ kr.

IV. Man wird hier nicht den Einwurf machen, daß 15 Pf. mit 23 fl. multiplicirt und dann durch 7 Pf. dividirt würden, da diese Zahlen, sobald sie in der Proportion geordnet sind, ihre benannte Eigenschaft gänzlich verlieren und nur als reine zu betrachten sind.

V. Die Richtigkeit obiger Auflösung läßt sich auch hierdurch nachweisen. Wenn 7 Pf. 23 fl. kosten, so wird 1 Pfund offenbar $\frac{23}{7}$ fl. und 15 Pfunde müßen daher $\frac{23}{7} \times 15$ d. h. $\frac{23 \times 15}{7}$ fl. kosten, wie vorhin ebenfalls gefunden wurde.

VI. Wenn der Ansatz gebildet ist und man kann einige verhältnißmäßige Glieder heben, so ist es rathsam, dieses zu thun; kommen aber Bruchglieder vor, so lassen sich die Nenner derselben leicht hinwegschaffen.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Was versteht man unter der Regel Detri oder unter der Regel von drey Sätzen? Beyspiele? Was ist ein gerades und was ein umgekehrtes Verhältniß? Beyspiele? (§. 1.)

II. Wie wird der Ansatz zur Regel Detri gebildet? Worauf beruhet dessen Richtigkeit? Wie findet man nun die Größe des fehlenden Gliedes? (§. 2.)

III. Wenn 685 Pf. zu transportiren 36 fl. kosten, was wird man für 830 Pf. auf dieselbige Weise zu entrichten haben? Hier $685 : 830 = 36 : x$, folglich $x = \frac{830 \times 36}{685} = 42$ fl. $\frac{610}{685}$ fl. $= 42$ fl. $53\ \frac{295}{685}$ kr. (§. 1 u. 2.)

IV. Wenn 12 Arbeiter ein gewisses Werk in 36 Tagen vollenden, wie viele Zeit werden 17 Arbeiter dazu nöthig haben? Hier wird: $17 : 12 = 36 : x$, welches $x = \frac{12 \times 36}{17} = 25\ \frac{7}{17}$ Tage (§. 1 u. 2.)

II. Lehrübung.

Die zusammengesetzte Regel Detri.

§. 1.

Begriff der Regel Dequinque und der zusammengesetzten Regel Detri überhaupt.

I. Unter der Regel Dequinque versteht man jene Rechnungsweise, welche lehrt, wie man aus

fünf gegebenen benannten Zahlen, worunter sich zwey Paare von gleichartigen befinden, eine verhältnißmäßige sechste, welche mit der gegebenen fünften gleichartig ist, finden soll. Ein Beyspiel ist dieses. Wenn 376 Pfunde auf eine Strecke von 50 Stunden zu transportiren 36 Gulden kosten, was wird man für den Transport von 548 Pfunden auf 42 Stunde zu bezahlen haben?

Hier sind 376 Pfunde und 548 Pfunde, dann 50 Stunde und 42 Stunde die zwey Paare gleichartiger Größen; die gegebenen 36 Gulden sind aber mit den zufindenden Gulden ebenfalls von einerley Art.

Man sieht sogleich, daß die zufindende Zahl von Gulden sowohl von der Größe des zu transportirenden Gewichtes, als auch von der Länge des Weges abhängig ist. Daher sagt man, diese Zahl stehe in einem zusammengesetzten Verhältnisse aus der Größe des Gewichtes und aus der Weite des Weges.

II. Da bisweilen sieben, neun, eilf Zahlen gegeben sind, um eine verhältnißmäßige achte, zehnte, zwölfte Zahl zu finden, so faßt man diese Aufgaben unter dem Namen der zusammengesetzten Regel Detri zusammen. Ein Beyspiel sey folgendes: Wie groß muß ein Kapital seyn, welches in 10 Jahren zu 4 Procent 5300 Gulden Zinsen bringt, wenn ein Kapital von 6500 Gulden in 6 Jahren zu 5 Procent 1950 Gulden Zinsen gibt? Hier hängt die Größe des zufindenden Kapitals offenbar sowohl von der Menge der zu erhaltenden Zinsen, als auch von der Zeit, binnen welcher es ausgeliehen ist, und von der Menge der Procente (von der Größe des Zins-

fußes) ab, d. h. sie steht in einem zusammengesetzten Verhältnisse aus diesen dreyerley Zahlen.

§. 2.

Auflösung dieser Aufgaben.

Zur Auflösung der Aufgaben der Regel Dequinque bemerke man diese Regeln:

I. Man setze jenes der gegebenen fünf Glieder, welches mit dem zu findenden sechsten gleichartig ist, als drittes Glied in die Proportion.

II. Man wähle sich irgend ein Paar der gegebenen gleichartigen Glieder, vergleiche dasselbe mit der, als drittes Glied in der Proportion stehenden Zahl und bestimme, ob das zufindende vierte Glied hierdurch größer oder kleiner, als dieses dritte werde, was jedesmal sehr leicht zu bestimmen ist. Im ersten Falle setze man die zwey gleichartigen Zahlen als ein Verhältniß vom Kleinern zum Größern; im letztern aber als ein Verhältniß vom Größern zum Kleinern.

III. Auf gleiche Weise verfahre man auch mit den zwey übrigen gleichartigen Gliedern, und setze sie in das gehörige Verhältniß unter die beyden vorigen. Die Art dieses Verhältnisses wird hierbey gerade so, wie vorhin bestimmt.

IV. Multiplicirt man nun die beyden gleichartigen Glieder der ersten zwey Verhältnisse miteinander, so entsteht eine einfache Proportion, worin das vierte Glied auf gewöhnliche Weise gefunden werden kann.

Erläuterung.

Es sey die Frage diese: Wie groß muß ein Kapital seyn, welches in 8 Jahren 2520 Gulden Zinsen bringt, wenn 6800 Gulden Kapital in 6 Jahren 340 Gulden Zinsen geben?

Da hier die Größe eines Kapitals gesucht wird, so ist (nach Regel I.) der erste Ansatz dieser

— : — = 6800 : x

Nun betrachte man z. B. den Einfluß der gegebenen Zinsen auf die Größe des zufindenden Kapitals, so ist klar, daß dasselbe, da es die größere Menge von Zinsen d. h. 3520 fl. geben soll, auch viel größer, als 6800 fl. seyn müsse. Daher wird (nach Reg. II.)

340 : 2520 = 6800 : x

Nimmt man nun auf die Zeit des Ausleihens Rücksicht, so ist wieder klar, daß das zufindende Kapital, da es auf längere Zeit (auf 8 Jahre) ausgeliehen ist, in dieser Hinsicht wieder kleiner, als 6800 fl. seyn werde, welches (nach Reg. III.) folgendes gibt.

340 : 2520 = 6800 : x
8 : 6

Daher wird nun (nach Regel IV.)
340 x 8 : 2520 x 6 = 6800 : x, welches, nach durchgeführter Rechnung, x = 37800 Gulden gibt.

Anderes Beyspiel.

Wenn von 376 Pfunden der Transport auf 50 Stunde 36 Gulden kostet, was wird man für 548 Pfunde auf 42 Stunde zahlen müssen?

Regel I. gibt: — : — = 36 : x. Regel II. gibt,

in Bezug auf die gegebenen 376 und 548 Pfunde, folgendes:

$$376 : 548 = 36 : x$$

Regel III. gibt

$$376 : 548 = 36 : x$$
$$50 : 42$$

Regel IV. gibt endlich

$$376 \times 50 : 548 \times 42 = 36 : x, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{548 \times 42 \times 36}{476 \times 50} = 44 \text{ Gulden } 4 \text{ Kr. } 1 \text{ Pf.}$$

Wenn in diesen Aufgaben Bruchglieder vorkommen, so kann man die Nenner derselben, nach den bekannten Regeln, hinwegschaffen.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Was versteht man unter der Regel De Quinque? Einige Beyspiele zur Erläuterung? Was ist die zusammengesetzte Regel Detri überhaupt? (§. 1.)

II. Wie heißen die Regeln zum Ansatze der Regel De-quinque? Worauf beruhet der Grund ihrer Richtigkeit? (§. 2.)

III. Wie werden folgende Beyspiele aufgelöset?

a) Wenn 24 Menschen in 15 Monaten 18000 fl. brauchen; wieviel werden 14 Menschen in 16 Monaten nöthig haben?

b) Wenn 18 Menschen täglich 5 Stunde arbeiten, so vollenden sie ein gewisses Werk innerhalb 45 Tagen; wie viele Arbeiter werden nöthig seyn, wenn man eben dieses Werk bey täglichen 8 Arbeitsstunden in 32 Tagen vollenden will?

c) Wenn ein Tuch $^5/_4$ breit ist, so brauchen 18

Menschen zu einem Kleidungsstücke 156 Ellen; wie viele Ellen werden 25 Menschen von einem 7/4 Ellen breiten Tuche nöthig haben?

d) Wie groß muß ein Kapital seyn, welches in 10 Jahren zu 4 Procent 5300 Zinsen gibt, wenn ein Kapital von 6500 Gulden in 6 Jahren zu 5 Procent 1950 fl. Zinsen bringt?

III. Lehrübung.

Die Gesellschaftsrechnung.

§. 1.

Begriff dieser Rechnung und Beyspiele.

I. Die Gesellschaftsrechnung oder die gesellschaftliche Theilrechnung lehret, eine gegebene Zahl in zwey oder in mehrere Theile so zu theilen, daß diese Theile in einem bestimmten Verhältnisse zusammen stehen; z. B. Man soll die Zahl 640 in zwey Theile zerlegen, welche sich gegen einander wie 5:7 verhalten. Diese zufindenden zwey Zahlen müssen also die Eigenschaft haben, daß sie in ihrer Summe die Zahl 640 bilden, und dann muß sich die kleinere so zur größern verhalten, wie 5 : 7.

II. Im bürgerlichen Leben hat diese Theilung vorzüglich in zwey Hauptfällen Statt:

1) Entweder gebietet die Willkühr des Menschen dieselbe. Der Titius sagt z. B. in seinem Testamente: Der A, B und C sollen meine Erben seyn und mein Vermögen von 10000 fl. nach dem Verhältnisse von 3 : 5 : 7 theilen; d. h. so oft A 3 fl. bekömmt, soll

der B 5 fl. und der C 7 fl. erhalten. Wieviel bekömmt jeder?

2) Oder das Gesetz der Billigkeit schreibt eine solche Theilung nach bestimmtem Verhältnisse vor; z. B. A gab 8 fl. und B 5 fl. zum Ankaufe eines Lotterieloses, womit sie 850 fl. gewonnen haben. Wie theilen sie sich in diesen Gewinn? Offenbar muß hier die Zahl 850 in zwey Theile getheilt werden, welche sich wie 8 : 5 verhalten.

Andere Beyspiele zur Erläuterung lassen sich leicht angeben.

§. 2.

Anweisung zur Auflösung dieser Aufgaben.

I. Die Regel zur Auflösung dieser Aufgaben läßt sich am Deutlichsten in einem Beyspiele entwickeln. Wenn man den Gewinn von 850 fl. nach Verhältniß der Einlagen 8 : 5 theilen soll, so ist klar, daß von 13 fl. = (8 + 5) fl. der A 8 fl. und der B 5 fl. erhält. Daher muß jener so oft 8 fl. und dieser so oft 5 fl. bekommen, so oft die Zahl 13 in der zu theilenden Zahl 850 fl. enthalten ist. Dieses letztere zeigt aber der Quotient $\frac{850}{13}$ an. Daher ist der Antheil des

$$A = \frac{850}{13} \times 8 \text{ und der Antheil des } B = \frac{859}{13} \times 5.$$

Nennt man jenen Antheil x, diesen y, so hat man

$$x = \frac{850}{13} \times 8 \text{ und } y = \frac{850}{13} \times 5.$$

Aus jenem wird:

13 : 8 = 850 : x und aus diesem

13 : 5 = 850 : y, woraus folgende Regel zur Bildung des Ansatzes hervorgeht: Die Summe der Verhältnißzahlen verhält sich zur ersten (zweyten, dritten, vierten u. s. w.) Verhältnißzahl, wie die zu theilende Zahl sich zum verhältnißmäßigen ersten (zweyten, dritten, vierten u. s. f.) Antheile verhält.

Berechnet man obige Werthe von x und y, so wird $x = \frac{6800}{13} = 523\ \frac{1}{13}$ Gulden und $y = \frac{4250}{13}$ $= 326\ \frac{12}{13}$ Gulden. Diese Zahlen haben auch die gefoderten Eigenschaften, da $523\ \frac{1}{13} + 326\ \frac{12}{13}$ $= 850$ und auch $523\ \frac{1}{13} : 326\ \frac{12}{13} = 8 : 5$ ist.

II. Auf ähnliche Art wird auch die andere, oben bemerkte Aufgabe aufgelöset. Um nämlich 10000 fl. nach dem Verhältnisse von 3 : 5 : 7 zu theilen, bedenke man nur, daß der A so oft 3 fl., der B 5 fl. und der C 7 fl. bekommen muß, wie oft 3 + 5 + 7 oder 15 in 10000 enthalten ist. Daher wird der Antheil von $A = \frac{10000}{15} \times 3$, jener von $B = \frac{10000}{15} \times 5$ und jener von $C = \frac{10000}{15} \times 7$. Heißt der erste x, der zweyte y und der dritte z, so entstehen folgende Proportionen:

15 : 3 = 10000 : x, oder x = 2000

15 : 5 = 10000 : y, oder y = $3333\frac{1}{3}$

15 : 7 = 10000 : z, oder z = $4666\frac{2}{3}$

Summe . . 10000 fl.

Daß sich diese drey Werthe auch wie 3 : 5 : 7 verhalten, folgt daraus, daß jeder ein Product aus eben diesen Zahlen in den Bruch $\frac{10000}{15}$ ist.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Was versteht man unter der Gesellschaftsrechnung? In welchen Fällen hat sie Statt? Erläuterung durch Beyspiele? (§. 1.).

II. Wie wird der Ansatz zur Gesellschaftsrechnung gebildet? Worauf beruhet die Richtigkeit der Vorschrift? (§. 2.).

III. Wie werden folgende Beyspiele aufgelöset?

a) Es sollen drey Gemeinden A, B und C eine Steuersumme von 6500 fl. so erlegen, daß A nach dem Verhältniß 2, B nach 3 und C nach 5 beytragen soll. Wieviel beträgt der Antheil einer jeden?

b) Vier Kaufleute: A, B, C und D befrachteten ein Schiff mit Gütern; so, daß A 10000 fl.; B 7000 fl., C 8600 und D 12000 fl. zuschoß. Bey einem Sturme auf dem Meere wurden die Waaren des D über Bord geworfen, um das Schiff zu retten. Was beträgt der Verlust von A, B, C und was ist der Verlust von D?

IV. Lehrübung.

Die Vermischungsrechnung.

§. 1.

Begriff und Beyspiele.

Bey der Vermischungsrechnung kommen folgende zwey Hauptfälle vor:

I. Aus der Menge und dem Preise verschiedener zu vermischenden Materien den Werth des aus ihnen gemischten Körpers überhaupt und eines bestimmten Theils derselben zu berechnen, und

II. Aus dem Preise verschiedener zu vermischenden Materien die verhältnißmäßige Hergabe zu bestimmen, um einen angegebenen Mittelpreis zu erhalten.

Beyspiele. Zu I. Man hat von derselbigen Fruchtgattung 8 Malter zu 6 fl. per Malter, 10 Malter zu 5 fl. und 15 Malter zu 7 fl. zusammengemengt. Was ist der Werth des ganzen Gemenges und eines Malters von demselben?

Zu II. Wieviel muß man von einem Weine, wovon eine Maas 40 kr. und von einem andern, wovon eine Maas 60 kr. kostet, nehmen, um 60 Maase zu erhalten, wovon eine Maas 48 kr. kostet?

§. 2.

Regel zur Auflösung dieser Fälle.

I. Die erste Art der hierhergehörigen Fälle wird auf folgende Weise aufgelöset:

1. Man multiplicire den Preis jedes Maases der

vermischten oder vermengten Materien mit der Menge dieser Maase und addire die Producte zusammen, so ist die Summe der Werth der ganzen Mischung.

2. Man dividire in diesen Werth mit der Summe aller in der Mischung vorkommenden Maase, so ist der Quotient der Preis eines Maases dieser Mischung.

Erläuterung. In obigem Beyspiele (§. 1. zu I.)

haben	8	Malter zu	6 fl.	einen Werth von	48 fl.
ferner	10	« «	5 fl.	« «	50 fl.
und	15	« «	7 fl.	« «	105 fl.
daher	33	Malter einen Werth von . . .			203 fl.

und sowit hat 1 Malter der Mischung einen Werth von

$$\frac{203}{33} = 6\ \frac{5}{33}\ \text{fl.} = 6\ \text{fl.}\ 9\ \frac{1}{11}\ \text{kr.}$$

II. In Rücksicht der andern Art von Fällen bemerke man, ob der zufindende Mittelpreis von dem höheren und niedern Preise gleichweit oder ungleichweit abstehet. Ist jenes, so sind die Hergaben der beyden letztern Materien gleich; ist dieses, so bestimme man die Differenzen zwischen dem höheren Preise und dem Mittelpreise und zwischen dem niedern Preise und dem Mittelpreise. Jene Differenz bestimmt die verhältnißmäßige Hergabe der geringeren, diese aber jene der bessern Sorte der zu vermischenden Körper.

Beyspiele. Sollte nun von einem Weine, wovon die Maas 60 kr. und von einem andern, wovon die Maas 40 kr. kostet, eine Mischung gemacht werden, wovon die Maas 50 kr. werth ist, so steht 50 genau zwischen 60 und 40, in der Mitte, da $60 - 50 = 50 - 40$ ist. Folglich muß $60 + 40 = 2 \times 50$ und

daher $\frac{60 + 40}{2} = 50$ seyn. Daher gibt hier sowohl der bessere Wein als der geringere $^1/_2$ Maas, um 1 Maas von der mittlern Sorte zu bilden. Denn $30 + 20 = 50$. Sollten z. B. 48 Maas zu 50 kr. gemischt werden, so muß man 24 Maas vom bessern zu 60 kr. und 24 Maas vom geringern zu 40 nehmen.

Sollte man aber von einem Weine zu 60 kr. und von einem geringern zu 40 kr. eine Mischung zu 48 kr. bilden, so entsteht die Frage: Wieviel muß jede dieser Weinsorten geben, um 1 Maas der Mischung zu erhalten?

Wenn man den Antheil, welchen die bessere Weinsorte zur Mischung geben muß, um eine Maas vom Mittelpreise zu bilden, $= x$ (das hergebrachte Zeichen der unbekannten Größe) nennt, so ist $1 - x$ der Antheil, welchen die geringere Sorte dazu gibt. Daher ist $60 \times x$ oder $60x$ der Werth des bessern und $(1 - x) \times 40$ oder $40 - 40x$ der Werth des geringern in der zusammengemischten einen Maas des mittlern Weines. Da nun eine Maas des Mittelpreises 48 kr. kosten soll, so muß $60x + 40 - 40x = 48$ seyn. Nimmt man beyderseits 40 weg, so ist $60x - 40x = 48 - 40$ oder, wenn man wirklich abzieht, $20x = 8$ und, wenn man beyderseits mit 20 dividirt, $x = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$. Daher gibt der 60 kr. Wein $\frac{2}{5}$ und folglich der 40 kr. Wein $\frac{3}{5}$ zur Mischung. Wirklich ist auch $60 \times \frac{2}{5} +$

$40 \times \frac{3}{5} = 24 + 24 = 48$. Da sich die Hergabe des bessern zur Hergabe des geringern verhält, wie $\frac{2}{5} : \frac{3}{5}$ d. h. wie 2 : 3 und die Differenzen 60 — 48 oder 12 und 48 — 40 oder 8, wenn sie verwechselt werden, sich eben so verhalten, weil 8 : 12 = 2 : 3 ist, so ergibt sich hieraus die Richtigkeit der obigen Regel.

Sollten nun z. B. 80 Maase des mittlern Weins durch Mischung erhalten werden, so müßte man diese Zahl 80 nach dem Verhältnisse 2 : 3 theilen.

§. 3.

Fernere Anwendungen der Vermischungs-Rechnung.

I. Diese Rechnung findet eine interessante Anwendung bey Vermischung der Metalle. Wenn z. B. das Silber ganz frey von fremdartigen Bestandtheilen ist, so heißt es reines Silber und 16 Lothe dieses Silbers sind eine Mark, welche man sechzehnlöthiges Silber nennt. Kömmt nun zu 15 Lothen reinem Silber 1 Loth Kupfer (um demselben eine größere Festigkeit zu geben) so heißt das Silber fünfzehnlöthiges; bey 14 Lothen reinem Silber und 2 Lothen Kupfer heißt es vierzehnlöthig, bey 13 Lothen reinem Silber und 3 Lothen Kupfer, dreyzehnlöthig u. s. f.

II. Hierauf gründen sich nun folgende Aufgaben:

1. Es werden zusammengeschmolzen:

10 Lothe von 15 löthigem Silber
12 « « 13 « «
15 « « 14 « «

Wieviellöthig wird die Mischung seyn?

Da in einem Lothe des 15löthigen Silbers 15 reine Silbertheile und 1 Theil Kupfer enthalten ist, so enthalten die gegebenen 10 Lothe offenbar 15 × 10 oder 150 reine Silbertheile. Auf gleiche Weise enthalten die 12 Lothe des 13löthigen Silbers, 12 × 13 oder 156 reine Silbertheile und in den 15 Lothen des 14löthigen Silbers befinden sich 15 × 14 oder 210 reiner Silbertheile. Die ganze Mischung enthält daher 150 + 156 + 210 = 516 reine Silbertheile. Da aber diese 516 Silbertheile in 10 + 12 + 15 d. h. in 37 Lothen enthalten ist, so findet man, wieviele davon in 1 Lothe enthalten sind, wenn mit 37 in 516 dividirt wird. Dieses gibt $\frac{516}{37} = 13\ \frac{35}{37}$. Daher ist das zusammengeschmolzene Silber $13\ \frac{35}{37}$ d. h. beynahe 14löthig. Um es genau 14löthig zu machen, müßte man für 1 Loth der Mischung noch $\frac{2}{37}$ Lothe reine Silbertheile; folglich für 37 Lothe noch $\frac{2}{37} \times 37$ oder 2 Lothe reines Silber beymischen.

Auch kann diese Aufgabe durch Bestimmung der in der Mischung enthaltenen Kupfertheile aufgelöst werden. Da nämlich in 1 Loth 15löthigem Silber 1 Kupfertheil enthalten ist, so enthalten die gegebenen 10 Lothe dieses Silbers 10 × 1 = 10 Kupfertheile.

Auf ähnliche Art enthalten 12 Lothe 13löthiges Silber $12 \times 3 = 36$ und die 15 Lothe des 14löthigen Silbers $14 \times 2 = 28$ solcher Kupfertheile. Daher muß die ganze Mischung $10 + 36 + 30$ oder 76 dieser Kupfertheile enthalten. Da aber die Mischung aus 37 Lothen besteht, so enthält jedes einzelne $\frac{76}{37}$ oder $2\ \frac{2}{37}$ Kupfertheile. Folglich ist die Menge der reinen Silbertheile $= 16 - 2\ \frac{2}{37} = 13\ \frac{35}{37}$, wie vorhin ebenfalls gefunden worden ist.

2. Wieviel muß man vom 12löthigen und vom 15löthigen Silber nehmen, um 13löthiges zu erhalten? Man bestimme zuerst, wieviel man zu einem Lothe dieses Silbers von jenen beyden Sorten zu nehmen hat. Die Differenzen sind $15 - 13 = 2$ und $13 - 12 = 1$. Werden sie verwechselt, so gibt das 15löthige Silber $\frac{1}{3}$ und das 12löthige $\frac{2}{3}$ zur Mischung. Es ist auch $15 \times \frac{1}{3} + 12 \times \frac{2}{3} = 5 + 8 = 13$. — Sollten nun z. B. 38 Lothe von diesem 13löthigen Silber zusammengemischt werden, so müßte 38 nach dem Verhältnisse von 2 : 1 getheilt werden; eine Rechnung, welche leicht durchzuführen ist.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Was versteht man unter der Vermischungsrechnung? Welche Hauptfälle treten hierbey ein? Beyspiele zur Erläuterung? (§. 1.).

II. Wie werden diese Fälle aufgelöset? Grund dieses Verfahrens? (§. 2.).

III. Welche besondere Anwendung hat die Vermischungsrechnung bey der Löthigkeit des Silbers? Beyspiele zur Erläuterung? (§. 3.).

IV. Auflösung folgender Aufgaben:

a) Um gutes Schießpulver zu verfertigen, muß man 1 Pfund Salpeter, 6 Lothe Kohlenpulver und 4 Lothe Schwefel miteinander vermischen. Wie viel muß man von jedem dieser Körper nehmen, um 30 Pfunde Pulver zu erhalten.

b) Von zweyerley Fruchtsorten derselbigen Art kostet die bessere per Malter 8 fl., die geringere per Malter 5 fl. Wie viel muß man von jeder nehmen, um eine Sorte zu 7 fl. zu erhalten?

V. Lehrübung.

Die Kettenregel.

§. 1.

Begriff und Beyspiele.

I. Unter der Kettenregel oder Kettenrechnung versteht man eine Anweisung, das unbekannte Verhältniß einer Größe zu einer andern durch mehrere bekannte Zwischenverhältnisse zu finden; z. B. Wie verhält sich der Reichsthaler zur Caroline, wenn sich

der Reichsthaler zum Kopfstück wie 9 : 2, das Kopfstück zum Gulden, wie 1 : 3 und der Gulden zur Carolin wie 1 : 11 verhält?

Setzt man diese gegebene Proportionen unter einander, so bilden sie folgende Verbindung:

Reichsthaler	:	Kopfstück	=	9	:	2
Kopfstück	:	Gulden	=	1	:	3
Gulden	:	Carolin	=	1	:	11

und man sieht hieraus, daß das 2te Glied der 1ten Proportion das 1te Glied der 2ten Proportion; das 2te Glied dieser 2ten Proportion wieder das 1te Glied der 3ten Proportion bildet; so, daß das 1te Glied der 1ten und das letzte Glied der letzten Proportion jene beyde Größen sind, deren Verhältniß bestimmt werden soll. Wegen dieses Zusammenhangs der Glieder (den Gliedern einer Kette gleich) hat man dieser Rechnung den Namen Kettenregel gegeben.

II. Eine andere Frage sey diese: Wie viele Conventionsthaler kostet 1 Ballen Schreibpapier, wenn sich der Ballen zum Ries verhält wie 10 : 1, der Ries zum Buch wie 20 : 1, das Buch zum Bogen wie 24 : 1, der Bogen zum Heller wie 3 : 1 (das heißt: der Werth eines Bogens zum Werthe eines Hellers wie 3 : 1) der Heller zum Kreuzer wie 1 : 8, der Kreuzer zum Gulden wie 1 : 60, und der Gulden zum Conventionsthaler wie 1 : $2\frac{2}{5}$?

§. 2.

Regel zur Auflösung.

I. Man setze die gegebenen Verhältnisse so unter einander, daß sie (wie im vorigen §. gesagt worden

ist) kettenartig unter sich zusammenhängen, wo denn die gegebenen benannten Zahlen die ersten Verhältnisse, die reinen Zahlen dagegen die zweyten Verhältnisse bilden. Ist dieses, so wird sich das 1te Glied des 1ten Verhältnisses zum letzten Gliede des letzten Verhältnisses (der benannten Zahlen) verhalten wie das Product aus allen 3ten Gliedern sich zum Producte aller 4ten Glieder verhält, welches letztere Verhältniß sodann auf die kleinsten Zahlen gebracht wird.

II. Das erste Beyspiel des vorigen §. gibt dieses:

Reichsthaler	:	Kopfstück	=	9	: 2
Kopfstück	:	Gulden	=	1	: 3
Gulden	:	Carolin	=	1	: 11

Folglich Reichsthaler : Carolin = 9 : 66
oder wie 3 : 22.

Daher betragen 22 Reichsthaler soviel als 3 Carolin.

III. Das zweyte Beyspiel des vorigen §. gibt folgenden Ansatz:

Ballen	:	Ries	=	10	: 1
Ries	:	Buch	=	20	: 1
Buch	:	Bogen	=	24	: 1
Bogen	:	Heller	=	3	: 1
Heller	:	Kreuzer	=	1	: 8
Kreuzer	:	Gulden	=	1	: 60

Gulden : Conv. Thlr. = 1 : $2\frac{2}{5}$ Daher ist

Ballen : Conv. Thlr. = $10 \times 20 \times 24 \times 3 :$
$8 \times 60 \times 2\frac{2}{5} = 14400 : 1152 = 12\frac{1}{2} : 1.$

Diese letzte Proportion heißt nun soviel, als: der Werth eines Ballen verhält sich zum Werth eines Conventionsthalers wie $12\frac{1}{2}$: 1, oder 1 Ballen ist $12\frac{1}{2}$ Conventionsthaler werth; d. h. ein Ballen Schreibpapier kostet $12\frac{1}{2}$ Conventionsthaler.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Was ist die Kettenregel oder Kettenrechnung? Erläuterung durch Beyspiele? Was ist der Ursprung der Benennung? (§. 1.)?

II. Wie heißt die Regel zur Auflösung der Kettenrechnung? Grund dieses Verfahrens? (§. 2.)

Neunter Lehrgang.

Die Rechnung mit entgegengesetzten Zahlen.

I. Lehrübung.

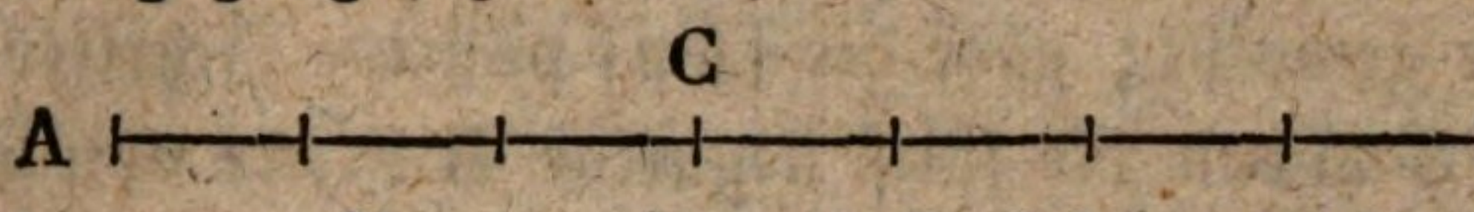
Entwickelung nöthiger Vorbegriffe.

§. 1.

Begriff der entgegengesetzten Größen und Zahlen.

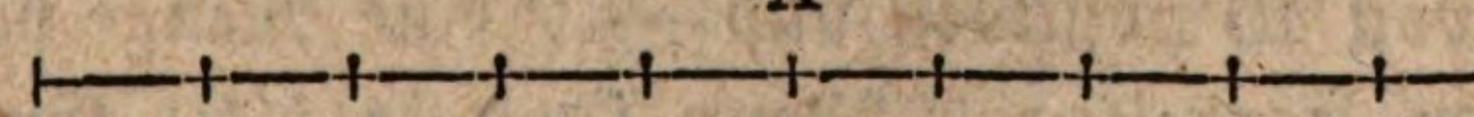
I. Unter entgegengesetzten Größen versteht man Größen von einerley Art, welche in einer solchen Beziehung gegen einander stehen, daß eine die

andere vermindert oder aufhebt. Zum Beyspiele dienen Schulden und Vermögen, da jene durch dieses und dieses wiederum durch jene vermindert wird. Sind aber die Schulden dem Vermögen gleich, so heben sie sich gegenseitig einander auf und ihr Resultat ist = 0. Auch Vorwärtsgehen und Rückwärtsgehen sind entgegengesetzte Größen,



Denn wer z. B. von A nach B sieben gleiche Schritte gemacht und dieselbe wieder von B nach A eben so rückwärts gethan hat, befindet sich wieder in A und hat sich dem Puncte B gar nicht genähert. Wäre er aber von B bis C um vier Schritte zurückgegangen, so würde er sich im Ganzen dem Puncte B um drey Schritte (von A bis C) genähert haben.

II. Weil Bejahen und Verneinen ebenfalls entgegengesetzte Dinge sind, so hat man eine von den beyden entgegengesetzten Größen die bejahende oder positive; die andere aber die verneinende oder negative genennt. Die positive Größe ist jene, welche einem bestimmten (willkührlich gewählten oder nothwendig gegebenen) Ziele entspricht; die negative aber diejenige, welche von diesem Ziele abführt. Zur Erläuterung denke man sich die von Norden nach Süden gehende gerade Linie NS



Wer sich in A befindet und gegen Norden gehen will, für den sind die Schritte von A nach N positive Schritte, weil sie diesem Ziele näher führen; die Schritte von A nach S aber sind für ihn negative

Schritte, weil sie ihn von diesem Ziele (in N) ablenken. Auch sieht man hieraus, daß sowohl die positiven, als die negativen Schritte wirkliche Schritte sind und daß ihr Gegensatz nur in der Richtung besteht, nach welcher sie entweder dem Ziele zuführen, oder von demselben ablenken. Wer von A nach S und von S wieder nach A gegangen ist, hat zehn wirkliche Schritte gemacht; aber die fünf positive Schritte von A nach S haben die fünf negative Schritte von S gegen A aufgehoben und ein Resultat = 0 hervorgebracht, da in dem Anfangspuncte A weder eine Annäherung, noch eine Ablenkung in Bezug auf S Statt findet.

Da man alle Größen zählen und insofern durch Zahlen darstellen kann, so läßt sich die Lehre von entgegengesetzten Größen als jene von entgegengesetzten Zahlen behandeln, wie sie auch nunmehr vorgetragen wird.

§. 2.

Bezeichnungsweise und Folgerungen.

I. Da Vermehren oder Vermindern entgegengesetzte Rechnungsoperationen sind, so ist man auf den Gedanken gekommen, die positiven Größen mit dem Zeichen der Addition, die negativen mit jenem der Subtraction zu bezeichnen. So bedeutet z. B. + 10 eine Menge von 10 positiven und — 7 eine Menge von 7 negativen Einheiten. Wenn jene Zahl 10 Gulden vermögen ausdrückt, so stellt diese 7 Gulden Schulden dar. Wenn eine Zahl kein Zeichen vor sich hat, so wird sie als eine positive gedacht.

Es wäre schicklicher gewesen, wenn man für die positiven und negativen Zahlen besondere Zeichen gewählt hätte, weil wesentlich verschiedene Dinge auch mit verschiedenen Zeichen dargestellt werden sollten.

II. Wenn zwey gleiche entgegengesetzte Zahlen zusammen kommen, so heben sie einander gegenseitig auf, und sind zusammen $= 0$. So ist z. B. $+ 7 - 7 = 0$; $+ 12 - 12 = 0$ u. s. f.

Sind diese entgegengesetzte Zahlen ungleich, so hebt die kleinere sich selbst in der größern auf und die Differenz bekömmt das Zeichen der größern Zahl. So ist $+ 15 - 9 = + 6$; $+ 24 - 14 = + 10$; ferner ist $- 8 + 3 = - 5$; $- 30 + 16 = - 14$ u. s. f. So sind z. B. 15 Gulden Vermögen und 9 Gulden Schulden zusammen soviel, als 6 Gulden Vermögen. Ferner ist 30 Gulden Schulden und 16 Gulden Vermögen zusammen soviel, als 14 Gulden Schulden u. s. w.

III. Werden aber positive Zahlen zu positiven, oder negative zu negativen gesetzt, so bleibt die Summe in jenem Falle eine positive, in diesem eine negative, da diese Zahlen unter sich gleichartig sind und somit keinen Gegensatz bilden. So ist z. B. $+ 8 + 4 + 10 = + 22$; aber $- 7 - 15 - 12 = - 34$ u. s. f.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Was sind entgegengesetzte Größen? Erläuterung durch Beyspiele? Welche nennt man die positive, welche die negative? Sind die negativen Größen wirkliche Größen? Erläuterung durch Beyspiele? (§. 1.).

II. Wie werden die positiven und wie die negativen Zahlen bezeichnet? Sind die eingeführten Bezeichnungen zu billigen? Was ist das Resultat, wenn gleiche und wenn ungleiche entgegengesetzte Zahlen zusammen kommen? Wie wird die Summe positiver und wie wird die Summe negativer Zahlen? Warum ist die Summe aus einer positiven und aus einer negativen Zahl eigentlich eine Subtraction? (§. 2.).

II. Lehrübung.

Die Addition und Subtraction in entgegengesetzten Zahlen.

§. 1.

Entgegengesetzte Zahlen zu addiren.

I. Wenn mehrere entgegengesetzte Zahlen zu addiren sind, so bringe man zuerst alle positive und sodann alle negative in eine Summe; sind beyde Summen einander gleich, so heben sie sich gänzlich auf und ihre Hauptsumme ist = 0. Ist aber die eine Summe größer, als die andere, so ziehe man die kleinere von der größern ab und setze das Zeichen der größern ihr vor.

Der Grund dieses Verfahrens geht theils aus dem Begriffe der Addition überhaupt, theils aus den bisherigen Lehren von entgegengesetzten Zahlen hervor.

zu add. Zahlen. { + 12 − 3 − 7 + 9 − 8 + 10 − 3
{ + 1 − 5 + 12 − 4 − 2 + 9

Die Summe aller positiven ist = 12 + 9 + 10 + 1 + 12 + 9 = + 53 die Summe aller negativen ist = − 3 − 7 − 8 − 3 − 5 − 4 − 2 = − 32 folglich die Hauptsumme = + 53 − 32 = + 21.

II. Auch könnte die Hauptsumme dadurch gefunden werden, daß man jede der gegebenen Zahlen mit der ihr unmittelbar folgenden vergliche, ihre Summe fände, und dieses bis zur letzten Zahl fortsetzte. Z. B. + 12 und — 3 gibt + 9; dazu — 7 gibt — 2; dazu + 9 gibt + 7; dazu — 8 gibt — 1 u. s. w. bis zum Schlusse.

Ferner seyen die zu addirenden Zahlen folgende: + 20 — 12 — 6 + 9 — 3 + 7 — 10 + 18 — 3 + 6 — 15 — 7, so sind alle positive = + 20 + 9 + 7 + 18 + 6 = + 60 und alle negative geben — 12 — 6 — 3 — 10 — 3 — 15 — 7 = — 56; somit wird die zufindende Hauptsumme = + 60 — 56 = + 4.

§. 2.

Entgegengesetzte Zahlen zu subtrahiren.

I. Als Vorbereitung zur Subtraction bemerke man folgende zwey Sätze:

1) Eine positive Zahl abziehen, heißt soviel, als die ihr gleiche negative addiren. Denn ob man z. B. von + 12 die + 7 abzieht oder ob man zu + 12 die — 7 addirt, ist einerley, da beydes + 5 zum Resultate gibt.

2) Eine negative Größe subtrahiren, heißt soviel, als die ihr gleiche positive Größe addiren. Denn die negative Größe drückt einen Mangel aus; die negative Größe abziehen heißt daher soviel, als diesen Mangel hinwegnehmen. Soll aber ein Mangel weggenommen werden, so muß man soviel wirkliches setzen, als wieviel dieser Mangel beträgt. Daher heißt z. B. — 5

hinwegnehmen soviel, + 5 addiren; denn wenn der Mangel von 5 Einheiten soll weggenommen werden, so kann dieses nur durch das wirkliche Setzen von 5 Einheiten geschehen.

II. Hieraus entsteht diese Regel für die Subtraction: Man verwandle in der abzuziehenden Zahl alle Zeichen in die entgegengesetzten und addire nun mit diesen verwechselten Zeichen.

Folgende Beyspiele erläutern dieses:

I. + 7 — 10 — 1 + 9 — 3
+ 9 + 3 + 5 — 7 — 5 abzuzieh. Zahl
— — — + +

— 2 — 13 — 6 + 16 + 2 Rest.

Eine Probe wird gemacht, wenn man den Rest zur abgezogenen Zahl addirt, wodurch die Zahl, wovon der Abzug geschehen ist, wieder erhalten wird. Dies gibt im vorstehendem Beyspiele:

+ 9 + 3 + 5 — 7 — 5
— 2 — 13 — 6 + 16 + 2 } zu addiren

+ 7 — 10 — 1 + 9 — 3 Summe

II. — 8 + 5 — 1 + 12 — 17 + 12 — 3 + 18
— 13 + 12 — 7 + 20 + 9 + 23 + 8 — 1 abzuzi Zahl
+ — + — — — — +

+ 5 — 7 + 6 — 8 — 26 — 11 — 11 + 19 Rest
— 13 + 12 — 7 + 20 + 9 + 23 + 8 — 1 abge Zahl

— 8 + 5 — 1 + 12 — 17 + 12 — 3 + 18 Sum

III. Hierher gehört auch die Anwendung der Parenthese. So heißt z. B. 8 — (7 — 9) soviel, als

von 8 soll man 7 — 9 abziehen. Da nun 7 — 9 = — 2 ist, so soll von 8 diese — 2 abgezogen werden, welches = 8 + 2 = 10 ist. Daher wird auch 8 — (7 — 9) = 8 — 7 + 9 = 8 + 9 — 7 = 17 — 7 = 10. — Auf gleiche Weise ist z. B. 12 — (8 — 3 — 10) = 12 — 8 + 3 + 10 = 25 — 8 = 17 u. s. f.

IV. Da man nun auch größere Zahlen von kleinern abziehen kann, so ist der Unterschied in dem arithmetischen Verhältnisse vom Kleinern zum Größern immer eine negative Zahl. Z. B. in dem Verhältnisse 7 — 12 ist er = — 5; was als Anhang zur Lehre von den arithmetischen Verhältnissen bemerkt werden kann.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Wie verfährt man, um mehrere entgegengesetzte Zahlen zusammen zu addiren? Wie läßt sich eine Probe hierüber anstellen? (§. 1.)

II. Was heißt es: eine positive Zahl abziehen? Was heißt es: eine negative Zahl abziehen? Wie heißt die Regel zur Subtraction entgegengesetzter Zahlen? Wie verfährt man, wenn mehrere in einer Parenthese stehende Größen subtrahirt werden sollen? Wie kann man größere Zahlen von kleinern abziehen? (§. 2.)

III. Lehrübung.

Die Multiplication und Division in entgegengesetzten Zahlen.

§. 1.

Regel für die Zeichen. Wirkliche Ausführung der Multiplication.

I. Die Multiplication in entgegengesetzten Zahlen ist einfach, sobald man die Regeln in Hinsicht der Zeichen beyder Factoren kennt. Die möglichen Fälle sind folgende:

1) Was gibt + 6 × + 4?
2) Was gibt — 6 × — 4?
3) Was gibt + 6 × — 4?
4) Was gibt — 6 × + 4?

Zu 1) Da die positiven Größen der Bejahung; die negativen aber der Verneinung entsprechen, so heißt eine positive Zahl mit einer positiven multipliciren soviel, als die Bejahung bejahen, wodurch offenbar eine Bejahung entsteht. Daher ist + 6 × + 4 = + 24.

Zu 2) Hier heißt — 6 mit — 4 multipliciren soviel, als die Verneinung verneinen, welches offenbar ein Bejahung gibt. Daher muß — 6 × — 4 = + 24 seyn.

Zu 3) Es heißt + 6 mit — 4 multipliciren soviel, als die Bejahung verneinen, welches eine Verneinung hervorbringt. Daher ist + 6 × — 4 = — 24.

Zu 4) Nun ist — 6 mit + 4 multipliciren soviel, als die Verneinung bejahen, woraus offenbar

eine Verneinung entspringt. Daher ist $-6 \times +4 = -24$.

II. Aus diesen vier Regeln entstehen folgende zwey allgemeine Vorschriften für das wirkliche Multipliciren: Wenn die zwey Factoren gleiche Zeichen haben, so wird das Product positiv; haben sie aber verschiedene Zeichen, so entsteht ein negatives Product.

Zur Erläuterung folgende Beyspiele:

$$\left.\begin{array}{r} -8+3+10-9+15-7+8 \\ -5 \end{array}\right\} \text{Factoren}$$

$$+40-15-50+45-75+35-40 \quad \text{Product.}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} +10 & -12 & -7 & +9 & -6 & +3 & = & -3 \\ & & & & +2 & -6 & = & -4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -60+72+42-54+36-18 \\ +20-24-14+18-12+6 \end{array}\right\} = +12$$

Aus diesem Beyspiele kann man zugleich die Probberechnung ersehen, welche sich über dasselbe anstellen läßt, da $+72+42+36+20+18+6$ und $-60-54-18-24-14-12$ zusammengenommen ebenfalls $+12$ geben.

III. Noch bemerke man hier, daß drey negative Factoren wieder ein negatives Product bilden. So ist $-3 \times -4 \times -10 = +12 \times -10 = -120$. Vier negative Factoren geben aber wieder ein positives Product. Denn $-2 \times -4 \times -10 \times -5 = +8 \times +50 = +400$. — Wenn die negativen Factoren in gerader Zahl vorhanden sind, so wird das Product immer positiv; sind sie aber in ungerader

Zahl da, so entsteht ein negatives Factum. — Wie es sich bey mehreren Factoren mit ungleichen Zeichen verhält, kann man ebenfalls hieraus entwickeln.

§. 2.

Regeln für die Zeichen bey der Division.

Wirkliches Dividiren.

I. Auch bey der Division können vier Hauptfälle eintreten; z. B.

1) Was gibt + 48 : + 6?
2) Was gibt — 48 : — 6?
3) Was gibt + 48 : — 6?
4) Was gibt — 48 : + 6?

Zu 1) Wenn + 48 : + 6 nicht + 8 zum Quotienten gäbe, so müßte der Quotient — 8 seyn und es müßte (nach der gewöhlichen Probe über die Division) + 6 × — 8 den Dividenden + 48 geben, was nicht möglich ist, da + 6 × — 8 = — 48 ist. — Daher muß + 48 : + 6 = + 8 seyn.

Zu 2) Wenn — 48 : — 6 nicht + 8 zum Quotienten gäbe so müßte dieser — 8 seyn und es wäre wieder (nach der Probe der Division) — 6 × — 8 dem Quotienten — 48 gleich, was unmöglich ist, weil — 6 × — 8 = + 48 gibt. Folglich ist der Quotient aus — 48 : — 6 = + 8.

Zu 3) Gäbe + 48 : — 6 nicht — 8 zum Quotienten, so wäre dieser + 8 und es müßte wieder — 6 × + 8 den gegebenen Dividenden + 48 hervorbringen, was unmöglich ist, weil — 6 × + 8 = — 48 ist. Somit ist + 48 : — 6 = — 8.

Zu 4) Wenn endlich — 48 : + 6 nicht — 8 gä-

be, so müßte der Quotient + 8 seyn und man hätte + 6 × + 8 = − 48, was widersprechend ist. Daher hat man − 48 : + 6 = − 8.

II. Hieraus entsteht die allgemeine Regel: Wenn der Dividend und Divisor einerley Zeichen haben, so wird der Quotient positiv; haben jene aber verschiedene Zeichen, so ist der Quotient negativ.

Die wirkliche Division ist nunmehr leicht auszuführen:

Divis.	Dividend						Quotient					
− 5	− 10	+ 35	− 60	− 15	+ 45		2	− 7	+ 12	+ 3	− 9	

Ferner

Divis.	Dividend				Quotient			
+ 12	− 60	+ 24	− 48	− 7	− 5	+ 2	− 4	$-\frac{7}{12}$

Divis.	Dividend						Quotient					
+ 2	10	− 12	− 4	− 16	− 12	− 1	5	− 6	− 2	− 8	− 6	$+\frac{1}{2}$

III. Bey zusammengesetzten Divisoren verfahre man auf ähnliche Weise; z. B.

Divisor	Dividend						Quotient		
+ 3 − 2	12	− 21	− 36	− 8	+ 14	+ 24	4	− 7	− 12
	12			8					
		− 21	− 36	+ 14	+ 24				
		− 21		+ 14					
			− 36	+ 24					
			− 36	+ 24					
			0	0					

Auch hier läßt sich die Probe so anstellen, daß man den Divisor, Dividenden und Quotienten auf eine

Zahl bringt und nunmehr diese einfache Division ausführt. So ist im vorigen Beyspiele der Divisor $= +1$, der Dividend $= -15$ und der reducirte Quotient gibt ebenfalls -15.

IV. Da die Brüche soviel, wie Quotienten sind, so läßt sich die Frage leicht beantworten: Was man sich unter negativen Brüchen zu denken habe? Es bedeutet z. B. $-\frac{5}{8}$ entweder $-5:+8$ oder $+5:-8$; so wie auch z. B. $+\frac{7}{9}$ entweder $+7:+9$ oder auch $-7:-9$ bedeuten kann.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Wie viele Fälle treten bey zwey Factoren in Hinsicht der Zeichen ein? Welches Resultat hat in jedem einzelnen dieser Fälle Statt? Auf welchem Grunde beruht derselbe? Wie multiplicirt man entgegengesetzte Zahlen durch einander? Wie läßt sich die Probe hierüber anstellen? (§. 1.).

II. Welche Fälle kommen in Rücksicht der Zeichen bey der Division vor? Welches Resultat gilt für jeden derselben? Grund davon? Wie verfährt man bey der wirklichen Division in entgegengesetzten Zahlen? Wie kann man eine Probe hierüber anstellen? Was haben negative Brüche für eine Bedeutung? Müssen positive Brüche auch positive Zähler und Nenner haben? (§. 2.).

Zehnter Lehrgang.

Erste Gründe der Buchstabenrechnung.

I. Lehrübung.

Entwickelung nöthiger Grundlehren.

§. 1.

Begriff der Buchstabenrechnung.

I. Die seither betrachtete Zifferrechnung kann nur einzelne Resultate liefern, da jede Ziffer nur einen einzigen (durch ihr willkührliches Zeichen bestimmten) Werth hat. So bedeutet z. B. die Ziffer 6 immer nur eine Menge von sechs Einheiten. Will man daher nicht einzelne bestimmte Zahlen, sondern eine Zahl im Allgemeinen darstellen, so muß ein Zeichen angenommen werden, welches hierzu schicklich und von der Ziffer verschieden ist. Man wählte hierzu die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets und drückt eine ganze Zahl durch a, eine andere ihr ungleiche durch b, eine dritte durch c u. s. f. aus; so, daß diese Buchstaben als allgemeine Zahlzeichen betrachtet werden können. Es stellt demnach der Ausdruck $a + b$ jede aus zwey ganzen Zahlen bestehende Summe; $a - b$ jede Differenz zweyer ganzen Zahlen; $a \times b$ (wofür man auch $a . b$ oder schlechthin ab schreibt) jedes Product aus zwey ganzen Zahlen und $\frac{a}{b}$ oder $a : b$ jeden Bruch oder jeden Quotienten ganz im Allgemeinen dar. — Die bekannten Zahlen werden mit der eben genannten ersten;

die unbekannten aber mit den letzten Buchstaben des Alphabets (z. B. mit x, y, z) bezeichnet.

II. Die Buchstabenrechnung ist jener Theil der Arithmetik, welcher lehrt, wie man sich der Buchstaben statt der Zahlen bedienen kann, um mit ihnen zu rechnen. Da die Buchstaben allgemeine Zahlzeichen sind, so liefert die Buchstabenrechnung allgemeine Resultate, welche sich nicht auf einzelne Zifferwerthe, sondern auf Zahlen überhaupt beziehen und daher auf eine unendliche Menge von einzelnen Fällen anwendbar sind. Daher beginnt mit der Buchstabenrechnung eine höhere Abtheilung der Arithmetik, welche sich vom gewöhnlichen Zifferrechnen zur Auffindung der allgemeinen Rechnungs-Resultate erhebt. — Ihre Eigenthümlichkeit und ihr Nutzen wird sich durch die Rechnung selbst immer deutlicher entwickeln.

§. 2.

Die Coefficienten und Exponenten.

1. Zur Abkürzung der Buchstabenschrift sind die Coefficienten und Exponenten eingeführt. Da z. B. $a + a + a + a + a$ soviel, als fünfmal die Zahl a ist, so setzt man statt dieser Summe bequemer $5\,a$ und nennt 5 den Coefficienten von a. Ferner ist $ac + ac + ac = 3\,ac$, wo 3 der Coefficient vom Producte ac ist. Daher sind Coefficienten überhaupt jene Ziffer, welche man zur Linken neben die Buchstaben setzt, um anzudeuten, wie oft diese Buchstabengrößen vorhanden sind. So ist z. B. $-b-b-b = -3\,b$ u. s. w.

II. Denkt man sich das Product a × a, so schreibt man dieses bequemer so: a^2 und nennt 2 den Exponenten von a, welcher somit andeutet, daß a zweymal als Factor vorhanden ist. Anstatt b × b × b × b × b schreibt man b^5. So heißt z. B. a^7 soviel, als a ist siebenmal als Factor vorhanden oder es ist sechsmal mit sich selbst multiplicirt. In Zahlen wäre z. B. $8^2 = 8 \times 8 = 64$; $10^4 = 10000$; $5^3 = 125$ u. s. f. — Die Exponenten sind daher jene Zahlen, welche oben zur Rechten der Buchstaben oder Ziffer gesetzt werden und durch die Menge ihrer Einheiten andeuten, wie oft diese Zahlen als Factor vorhanden sind. Auf ähnliche Weise wird (a + b) × (a + b) × (a + b) so geschrieben $(a + b)^3$.

Auch kann man sich allgemein dargestellte Coefficienten und Exponenten denken. So ist z. B. bey n . ab der allgemeine Coefficient von ab = n. Eben so bedeutet a^n soviel, als: a ist n mal als Factor gesetzt u. s. w.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Welche Resultate liefert die Zifferrechnung? Welches Mittel wählte man, um Zahlen im Allgemeinen auszudrücken? Was ist die Buchstabenrechnung? Worin besteht ihr Nutzen? Allgemeiner Ausdruck einer Summe, einer Differenz, eines Products, eines Quotienten? (§. 1.).

II. Was nennt man Coefficienten? Erläuterung in Beyspielen? Was sind Exponenten? Erläuterung durch Beyspiele? Was sind allgemeine Coefficienten und Exponenten? (§. 2.).

II. Lehrübung.

Die Addition und Subtraction in Buchstaben.

§. 1.

Buchstabengrößen zu addiren.

I. Um mehrere gegebene Buchstabengrößen zu addiren, sehe man vor allem, ob in ihnen einerley Buchstaben vorkommen, oder nicht. Im letzten Falle kann keine Reduction angebracht werden, sondern man schreibt die Buchstaben mit ihren Zeichen nach alphabetischer Ordnung neben einander. Wenn man z. B. die Größen $3a$, $-4g$, $+ab$, $-3c$ und $+\frac{n}{m}$ addiren soll, so bleibt nichts übrig, als dieselbe alphabetisch mit ihren Zeichen zusammenzustellen. Daher ist die Summe diese: $3a + ab - 3c - 4g + \frac{n}{m}$.

II. Sind aber Buchstaben von gleicher Art gegeben, so lassen sie sich addiren. So gibt z. B. $3a$ und $5a$, und ab und $3ab$, und $-7c$ und $+2c$ folgende Summe: $8a + 4ab - 5ac$.

Wenn mehrere solcher Größen gegeben sind, so ordne man sie zuerst nach dem Alphabete, setze dann die gleichartigen unter einander, ziehe einen Absönderungsstrich und reducire nun nach den Regeln der entgegengesetzten Zahlen. Z. B.

$$\left.\begin{array}{rrrrrr} 5a & - & b & + 3c & - 2d & + h \\ -\ 4a & + 5b & - & c & + 7d & - 3h \\ a & - 3b & + 8c & - 5d & - 4h \\ 2a & + & b & -12c & + d & + 2h \end{array}\right\} \text{zu addiren}$$

$$4a + 2b - 8c + d - 4h \quad \text{Summe.}$$

$$\text{Oder: } \left.\begin{array}{rrrrrr} 5a & - & 4ab & + 3ac & - & 7b \\ -\ 5a & + & 9ab & - 3ac & + & 11b + d \end{array}\right\} \text{zu addiren}$$

$$* + 5ab \qquad * + 4b + d \quad \text{Summe}$$

die Summe ist daher $5ab + 4b + d$.

§. 2.

Buchstabengrößen zu subtrahiren.

I. Wenn die abzuziehende Größe mit derjenigen, wovon sie abgezogen werden soll, keine Buchstaben gemeinschaftlich hat, so wird die Subtraction nur dadurch angedeutet, daß man in jener Größe alle Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt und die Buchstaben nun nach dem Alphabete ordnet.

Sollte z. B. von $3a$ die Größe $2b$ abgegeben werden, so wird dieses so angedeutet: $3a - 2b$. Wäre aber von $2a$ die Größe $-5b$ zu subtrahiren, so erhielte man $2a + 5b$. Sollte man von $a - 2b - 4c$ abziehen die Größe $-3ad + g$, so gäbe dieses $a - 2b + 4c - (-3ad + g) = a - 2b + 4c + 3ad - g = a + 3ad - 2b + 4c - g$.

II. Befinden sich aber in den beyden gegebenen Größen gleichnamige Buchstaben, so ordne man sie zuerst nach dem Alphabete, setze sie gehörig unter einander, ziehe einen Absönderungsstrich, verändere

in der abzuziehenden Größe alle Zeichen in die entgegengesetzten und addire nun mit diesen veränderten Zeichen. Der Grund dieses Verfahrens beruht darauf, daß eine positive Größe abziehen so viel heißt, als die ihr gleiche negative addiren; eine negative Größe subtrahiren aber so viel ist, als eben diese positive Größe addiren. Folgende Beyspiele dienen zur fernern Erläuterung:

I. Von 6a — d + 3c — 4h + 9b — g soll man subtrahiren: 11a + 4d — 8b — 7g + 5h + 14c, so ordne man vor Allem beyde Größen alphabetisch; nämlich:

6a + 9b + 3c — d — g — 4h } geordnet
11a — 8b + 14c + 4d — 7g + 5h }
— + — — + — Veränd. d. Z.

—5a + 17b — 11c — 5d + 6g — 9h Differenz.

II. Von 12a — 8b — 7c — 4d + g soll subt. w.
15a — 8b — 9c — 6d + 8g
— + + + — so entsteht der

Rest — 3a * .+ 2c + 2d — 7g

Die Probe kann dadurch gemacht werden, daß man den Rest zur abgezogenen Zahl addirt. Nämlich in dem letztern Beyspiele ist

15a — 8b — 9c — 6d + 8g } addirt
— 3a * + 2c + 2d — 7g }

12a — 8b — 7c — 4d + g Summe.

III. Auch hier kann man den Gebrauch der Parenthese bemerken. Es ist z. B. a + 3b — (ab — bc + 3d) = a + 3b — ab + bc — 3d. Oder 3a — (2a — b + 3d) = 3a + 2a + b — 3c = 5a + b — 3c.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Wie verrichtet man die Addition in Buchstabengrößen, wenn dieselbe ungleichartig sind? Wie werden gleichartige Buchstabengrößen addirt? Grund dieses Verfahrens? (§. 1.)

II. Worauf beruht die Subtraction ungleichartiger Buchstabengrößen? Wie verfährt man, wenn sie gleichartig sind? Worauf beruht die Richtigkeit dieses Verfahrens? Wie macht man die Probe über die Subtractionsrechnung (§. 2.).

III. Lehrübung.

Ausführung der Multiplication und Division in Buchstaben.

§. 1.

Multiplication der Potenzgrößen.

I. Man versteht unter Potenzgrößen oder Potenzen alle Producte, welche aus gleichen Factoren bestehen und nennt ein solches Product von zwey gleichen Factoren die zweyte, von drey gleichen Factoren die dritte, von vier die vierte Potenz u. s. f. So ist z. B. a^2 die zweyte, a^3 die dritte, a^4 die vierte, a^n die nte Potenz von a, und man sieht hieraus, daß der Exponent die Art der Potenz oder ihren Grad bezeichnet. Die Größe a, woraus jene Potenzen hervorgehen, wird ihre Wurzel genennt. Daher ist von a^7 die Wurzel = a, von b^5 die Wurzel = b, von d^n die Wurzel = d u. s. w. Potenzen von gleichen Wurzeln oder von einerley

Wurzeln werden jene genennt, welche die nämliche Wurzel haben z. B. a^3 und a^5. Potenzen heißen aber von verschiedener Wurzel, wenn ihre Wurzelgrößen ungleichartig sind, wie z. B. a^3 und b^5, oder b^3 und c^3.

II. Um Potenzen von verschiedenen Wurzeln mit einander zu multipliciren, muß man dieselben mit dem Multiplicationszeichen neben einander stellen und es läßt sich keine Abkürzung anwenden. Soll z. B. a^2 mit b^3 multiplicirt werden, so ist dieses $= a^2 \times b^3$ oder im Allgemeinen $a^n \times b^m$

Sind aber Potenzen von einerley Wurzeln zu multipliciren, so setze man diese Wurzel einmal und gebe ihr einen Exponenten, welcher der Summe der Exponenten der Factoren gleich ist. So ist z. B. $a^3 \times a^2 = aaa \times aa = aaaaa = a^5$. Denn wenn a dreymal und wieder zweymal als Factor vorkömmt, so muß es im Ganzen 5mal als Factor vorhanden seyn. Im Allgemeinen $a^m \times a^n = a^{m+n}$

III. Bisweilen soll eine gegebene Potenz selbst wieder zur Potenz erhoben werden. In diesem Falle setzt man die Wurzel einmal und gibt ihr einen Exponenten, welcher dem Producte aus den gegebenen Exponenten gleich ist. So ist z. B. $(a^3)^2 = a^6$, denn $(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = a^{3+3} = a^{3\times 2} = a^6$. In Zahlen läßt sich dieses ebenfalls erläutern. Denn wenn man z. B. die 3te Potenz von 2 zur 2ten Potenz erheben sollte, so würde dieses die 6te Potenz von 2 geben. Im Allgemeinen $(a^m)^n = a^{m+n}$

IV. Um ein, aus mehreren Factoren bestehendes Product zu einer bestimmten Potenz zu erheben, kann

jeder Factor zu dieser Potenz erhoben und aus diesen potenzirten Factoren sodann das Product gebildet werden; z. B. $ab^3 = a^3 \times b^3$. Denn $ab^3 = ab\ ab\ ab = aaa\ bbb = a^3\ b^3$. Auch dieses kann leicht in Zahlen erläutert werden.

Soll man einen Bruch zu irgend einer Potenz erheben, so muß sowohl sein Zähler als sein Nenner auf diese Potenz erhoben werden. Oder $\left(\frac{a}{c}\right)^3 = \frac{a^3}{c^3}$. Denn $\left(\frac{a}{c}\right)^3 = \frac{a}{c} \times \frac{a}{c} \times \frac{a}{c} = \frac{aaa}{ccc} = \frac{a^3}{c^3}$. Wenn der Wurzelbruch ein ächter ist, so wird jede höhere Potenz desselben kleiner, als er selbst ist. Denn das Product aus zwey ächten Brüchen ist immer kleiner, als jeder seiner beyden Factoren.

§. 2.

Buchstabengrößen mit einander zu multipliciren.

I. Bey der Multiplication in Buchstabengrößen hat man zuerst auf ihre etwaigen Coefficienten und endlich auf ihre etwaigen Exponenten zu sehen. Die Regeln für die Zeichen sind die gewöhnlichen; die Coefficienten werden multiplicirt, verschiedenartige Buchstaben nur neben einander gestellt und bey Potenzen von einerley Wurzeln die Exponenten addirt. Vor allem aber muß man sowohl im Multiplicanden, als im Multiplicator die Buchstaben nach dem Alphabete ordnen, damit die Reduction bequem vorgenommen werden kann.

II. Der Grund dieser Vorschriften ergibt sich aus dem Bisherigen und folgende Beyspiele werden das practische Verfahren erläutern.

I. $\left.\begin{matrix} a + b \\ a + b \end{matrix}\right\}$ Factoren.

$a^2 + ab$
$\quad ab + b^2$ } Theilfacta.

$a^2 + 2\,ab + b^2$ Product.

II. $\left.\begin{matrix} a - b \\ a - b \end{matrix}\right\}$ Factoren.

$a^2 - ab$
$\quad - ab + b^2$ } Theilfacta.

$a^2 - 2\,ab + b^2$ Product.

III. $\left.\begin{matrix} a + b \\ a - b \end{matrix}\right\}$ Factoren.

$a^2 + ab$
$\quad - ab - b^2$ } Theilfacta.

$a^2 - b^2$ Product.

IV. $\left.\begin{matrix} a + b - d \\ a - b - d \end{matrix}\right\}$ Factoren.

$a^2 + ab - ad$
$\quad - ab - b^2 + bd$
$\quad\quad - ad - bd + d^2$ } Theilfacta.

$a^2 - 2\,ad - b^2 + d^2$ Product.

V. $5a - 2b - d$
$2a + 3b - 2d$

$10\,a^2 - 4\,ab - 2\,ad$
$15\,ab - 6\,b^2 - 3\,bd$
$- 10\,ad + 4\,bd + 2\,d^2$

$10\,a^2 + 11\,ab - 12\,ad - 6\,b^2 + bd + 2\,d^2$

VI. $5\,a^m + 8\,b^n$
$3\,a^m - 2\,b^n$

$15\,a^{2m} + 24\,a^m\,b^n$
$- 10\,a^m\,b^n - 16\,b^{2n}$

$15\,a^{2m} + 14\,a^m\,b^n - 16\,b^{2n}$ Product.

III. Das vorstehende dritte Beyspiel kann (wie jedes der übrigen) zur Erläuterung dienen, wie man durch die Buchstaben allgemeine Wahrheiten auffindet. Es stellt nämlich $a + b$ die Summe zweyer Zahlen und $a - b$ die Differenz eben dieser Zahlen vor. Zum Producte fand man $a^2 - b^2$ d. h. die Differenz von den zweyten Potenzen dieser Zahlen. Da dieses bey jeden andern zwey Zahlen auf gleiche Weise Statt finden muß, so ist folgender allgemeine Satz erwiesen: Wenn man die Summe zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt, so gibt das Product den Unterschied der zweyten Potenzen eben dieser Zahlen. Man kann sich leicht Zahlenbeyspiele hierüber bilden.

§. 3.

Division der Potenzgrößen.

I. Wenn die zu dividirenden Potenzen verschiedene Wurzeln haben, so kann ihre Division nur

angedeutet werden. Soll z. B. a^3 durch b^2 dividirt werden, so gibt dieses $a^3 : b^2$ oder auch $\frac{a^3}{b^2}$.

Haben aber die zu dividirenden Potenzgrößen einerley Wurzel, so wird der Quotient gefunden, wenn man die Wurzel einmal setzt und ihr einen Exponenten gibt, welcher der Differenz des Exponenten des Divisors von jenem des Dividenden gleich ist. So ist z. B. $a^7 : a^4 = a^{7-4} = a^3$. Denn $a^7 : a^4 = \frac{a^7}{a^4}$

$= \frac{aaaaaaa}{aaaa} = aaa = a^3$. Im Allgemeinen ist $c^m : c^n$

$= c^{m-n}$.

II. Wenn der Fall Statt findet, daß die gegebenen Potenzgrößen gleiche Exponenten haben, so gibt dieses zu folgendem Schlusse Veranlassung. Es ist $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$. Da aber auch $a^m : a^m = 1$ ist, weil jede Größe sich selbst 1mal enthält, so wird auch $a^0 = 1$, und man sagt: Jede Größe auf der Nullpotenz ist der Einheit gleich. So wird z. B. $83^0 = 1$; $276^0 = 1$; $3864^0 = 1$ u. s. f.

III. Dividirt man z. B. a^2 durch a^5, so wird nach der vorigen Regel $a^2 : a^5 = aa : aaaaa = \frac{aa}{aaaaa}$

$= \frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3}$. Aber $a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$. Daher ist $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, oder im Allgemeinen wird $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ seyn. Daher sind Potenzen mit negativen

Exponenten ächten Brüchen gleich, welche zum Zähler 1, zum Nenner aber eben diese Potenz mit dem gleichen positiven Exponenten haben. Daher ist z. B. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$;

ferner $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$ u. s. f.

IV. Diese Bedeutung der Nullpotenz und der Potenzen mit negativen Exponenten wird aus folgendem Beyspiele um so mehr verständlich werden, als man die Entstehung solcher Potenzen ganz ungezwungen hieraus erkennt. Es sey die gemischte Zahl 8764,395 durch Potenzen von 10 auszudrücken, so sieht man, daß diese Zahl auch auf folgende Weise kann bezeichnet werden:

$8.1000+7.100+6.10+4.1+3.0{,}1+9.0{,}01+5.0{,}001$,
oder $8+10^{+3}+7\times10^{+2}+6\times10^{+1}+4\times10^{0}+3\times10^{-1}$
$+9\times10^{-2}+5\times10^{-3}$.

Außerdem kann der Exponent auch ein ächter Bruch seyn, und die Frage ist dann, was solche Bruchexponenten für eine Bedeutung haben. Die Antwort hierauf soll in dem nächsten Lehrgange, wo dieselbe verständlicher seyn wird, gegeben werden.

§. 4.

Buchstabengrößen durch einander zu dividiren.

I. Wenn der Dividend und der Divisor keine Buchstaben mit einander gemein haben, so läßt sich die Division nicht wirklich ausführen, sondern entweder auf gewöhnliche Art oder bruchweise andeuten.

Wäre z. B. 3a durch 2b zu dividiren, so gäbe dieses entweder $3a : 2b$, oder $\frac{3a}{2b}$; ferner, wenn $a + bd$ durch $3c - m + n^2$ dividirt werden soll, so gibt dieses $\frac{a + bd}{3c - m + n^2}$.

II. Besteht der Divisor nur aus einem Buchstaben, welchen der Dividend in allen seinen Gliedern enthält, so folge man wegen der Zeichen den bekannten Regeln und setze in jedes Glied des Quotienten jenen Buchstaben oder jene Buchstaben nebst ihrem etwaigen Coefficienten, welche sich in diesen Gliedern des Dividenden mehr befinden. Denn es ist offenbar $ab : a = b$; $abd : b = ad$; $abd : bd = a$; $3a : 2a = \frac{2}{3}$ u. s. f.

III. Wenn aber Dividend und Divisor aus mehreren Gliedern besteht, welche zum Theil gleiche Buchstaben mit verschiedenen Zeichen, Coefficienten und Exponenten enthalten, so müssen beyde Größen vor Allem alphabetisch geordnet werden. Man dividirt sodann jedesmal mit dem ersten Gliede des Divisors in das gehörige Glied des Dividenden, multiplicirt mit dem gefundenen Quotienten den ganzen Divisor, subtrahirt diese Producte vom Dividenden und setzt dieses Verfahren so lange fort, bis sich entweder die ganze Division schließt oder ein Rest bleibt, welchen man, wie bey ganzen Zahlen, in Form eines Bruches ausdrückt.

IV. Nachstehende Beyspiele machen dieses Verfahren anschaulich:

Divis.	Dividend	Quotient
I. a	$-3a+ab-ac^2-ad$	$-3+b-c^2-d$

Divis.	Dividend	Quotient
II. $-3b$	$15ab-6b^2+3b^4-12b^n$	$-5a+2b+b^3-4b^{n-1}$

Divis.	Dividend	Quotient
III. $a+b$	$a^2+2ab+b^2$	$a+b$

a^2+ab

$ab+b^2$

$ab+b^2$

* *

Divis.	Dividend	Quotient
IV. $a+b$	a^2-b^2	$a-b$

a^2+ab

$-ab-b^2$

$-ab-b^2$

* *

Divisor	Dividend	Quotient
V. $3a^m-2b^n$	$15a^{2m}+14a^m b^n-16b^{2n}$	$5a^m+8b^n$

$15a^{2m}+10a^m b_n$

$24a^m b^n-16b^{2n}$

$24a^m b^n-16b^{2n}$

* *

Divisor	Dividend	Quotient
VI. $a+b-d$	$a^2-2ad-b^2+d^2$	$a-b-d$

$a^2+ab-ad$

$-ab-ad-b^2+d^2$

$-ab-b^2+bd$

$-ad-bd+d^2$

$-ad-bd+d^2$

* * *

Divisor	Dividend	Quotient
VII. $2a+3b-2d$	$10a^2+11ab-12ad-6b^2+bd+2d^2$	
	$10a^2+15ab-10ad$	—
	$-4ab-2ad-6b^2+bd+2d^2$	—
	$-4ab \quad -6b^2+4bd$	
	$-2ad-3bd+2d^2$	
	$-2ad-3bd+2d^2$	
	* * *	

Divisor	Dividend	Quotient
VIII. $a-b$	a^3-b^3	a^2+ab+b^2
	a^3-a^2b	
	a^2b-b^3	
	a^2b-ab^2	
	ab^2-b^3	
	ab^2-b^3	
	* *	

V. Dieses letzte Beyspiel spricht folgenden allgemeinen Lehrsatz aus: Wenn man mit dem Unterschiede zweyer Zahlen in den Unterschied ihrer dritten Potenzen dividirt, so erhält man eine Summe aus dem Quadrate der ersten, aus dem Producte der ersten in die zweyte und aus dem Quadrate der zweyten. In Zahlen läßt sich dieses erläutern.

Jedes dieser Divisions-Beyspiele gibt durch die Proberechnung wieder eine Multiplications-Uebung.

§. 5.

Uebungs-Fragen.

I. Was versteht man unter Potenzgrößen? Was ist der Grad, was die Wurzel der Potenz? Was sind Potenzen von einerley und von verschiedener Wurzel? Wie werden jene, wie diese mit einander multiplicirt? Grund dieses Verfahrens? Wie wird eine Potenz zur neuen Potenz erhoben? Wie erhebt man Brüche, wie Producte, welche aus mehreren Factoren bestehen, zu einer verlangten Potenz? (§. 1.)

II. Wie multiplicirt man eine mehrgliederige Buchstabengröße durch einen Buchstaben? Wie durch einen mehrgliederigen Multiplicator? Welche Regeln gelten für die Zeichen, für die Coefficienten und für die Exponenten. (§. 2.)

III. Wie werden ungleichartige Potenzgrößen mit einander dividirt? Wie verfährt man bey Potenzen von einerley Wurzeln? Wie entsteht die sogenannte Nullpotenz? Wem ist jede Größe auf der Nullpotenz gleich? Was bedeuten Potenzen mit negativen Exponenten? Erläuterung durch veränderte Darstellung eines gemischten Decimalbruchs? (§. 3.)

IV. Wie dividirt man ungleichartige Buchstabengrößen mit einander? Wie verfährt man, wenn der Divisor nur ein Buchstabe ist? Welche Regeln gelten für die Zeichen, für die Coefficienten, für die gemeinschaftlichen Buchstaben und für die Exponenten? Wie macht man die Probe über die Division? (§. 4.)

Eilfter Lehrgang.

Die Lehre von der Ausziehung der Quadratwurzel.

I. Lehrübung.

Entwickelung nöthiger Vorbereitungs-Sätze.

§. 1.

Erklärung einiger Grundbegriffe.

I. Wenn man eine Zahl einmal mit sich multiplicirt, so wird die hierdurch entstehende zweyte Potenz mit einem besondern Worte das Quadrat und die einmal mit sich selbst multiplicirte Zahl die Quadratwurzel genennt. So ist z. B. 25 das Quadrat von 5, und 5 die Quadratwurzel von 25. Auf gleiche Art ist 144 das Quadrat von 12 und 12 wiederum die Quadratwurzel von 144. Ferner ist von $\frac{2}{3}$ das Quadrat $\frac{4}{9}$; von $\frac{5}{6}$ ist das Quadrat $\frac{25}{36}$; von $\frac{1}{100}$ ist es $\frac{1}{10000}$ u. s. w. Die Benennung Quadrat ist aus der Geometrie in die Arithmetik übertragen worden, weil man den Flächeninhalt eines Quadrats findet, indem das Maas seiner Seite einmal mit sich selbst multiplicirt wird. Wäre z. B. die Seite eines Quadrats 8 Ruthen, so würde dessen Inhalt $8 \times 8 = 64$ Quadrat Ruthen betragen.

II. Aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel ziehen, heißt eine Zahl finden, welche einmal mit sich selbst multiplicirt jene gegebene Zahl

hervorbringt. Das willkührliche Zeichen für die Ausziehung der Quadratwurzel ist dieses √, und es bedeutet z. B. √ 348 soviel als, man soll die Quadratwurzel aus 348 finden. Das Zeichen entstand aus dem lateinischen r, welches man (als Anfangsbuchstaben des Wortes radix oder Wurzel) vor jene Zahlen setzte, deren Wurzeln man finden wollte.

Der Gegenstand dieses Lehrganges ist die Entwickelung der Methode, aus allen gegebenen, ganzen oder gebrochenen Zahlen die Quadratwurzeln zu finden.

Man nennt eine gegebene Wurzel eintheilig, wenn sie nur eine; zweytheilig, wenn sie zwey; dreytheilig, wenn sie drey Ziffer enthält, u. s. w. So ist z. B. 8 eine eintheilige, 46 eine zweytheilige, 354 eine dreytheilige Wurzel u. s. w.; die höchste Ziffer nennt man den ersten Theil, die darauf folgende den zweyten Theil der Wurzel u. s. f.

§. 2.

Nöthige Vorbereitungslehren.

I. Wenn eine Wurzel aus zwey Theilen besteht, und man erhebt sie zum Quadrate, so enthält dasselbe

a) das Quadrat des ersten Theils,

b) das doppelte Product aus dem ersten in den zweyten Theil, und

c) das Quadrat des zweyten Theils.

Wenn a + b die gegebene Wurzel ausdrückt, so findet man die Theile ihres Quadrates, wenn a + b mit sich selbst multiplicirt wird, wobey a den ersten

und b den zweyten Theil der Wurzel bedeutet. Die Rechnung gibt

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2\,ab + b^2 \end{array}$$

Hier stellt a^2 das Quadrat des ersten Theils, 2 ab das doppelte Product aus dem ersten in den zweyten Theil, und b^2 das Quadrat des zweyten Theils vor.

II. In Zahlen sey 38 die gegebene Wurzel, welche man sich als $30 + 8$ vorstellen kann, wobey $30 = a$ und $8 = b$ wird. Daher ist

$a^2 = 30 \times 30 = 900$, ferner

$2\,ab = 2 \times 30 \times 8 = 60 \times 8 = 480$, endlich

$b^2 = 8 \times 8 = 64$.

Daher muß $900 + 480 + 64 = 1444$ das Quadrat von 38 seyn, wie auch die gewöhnliche Rechnung lehrt, da $38 \times 38 = 1444$ ist. Auf diese Weise kann man die Quadratzahlen aller zweytheiligen Wurzeln aus ihren eben bemerkten drey Bestandtheilen bilden.

§. 3.

Folgerungen hieraus.

I. Bey zweytheiligen Wurzeln ist das Quadrat des ersten Theils das Quadrat eines Zehners, und muß somit in den Hunderten seine niedrigste Stelle

haben. Da aber dieser erste Theil höchstens = 90 seyn kann, das Quadrat von 90 aber 8100 ist, so kann das Quadrat des ersten Theils sich höchstens in die Tausende erstrecken.

Das doppelte Product, ist ein Product aus einem Zehner in einen Einer, und muß folglich seine niedrigste Stelle in den Zehnern haben. Am größten wird es dann werden, wenn die zweytheilige Wurzel selbst am größten, d. h. wenn sie 90 + 9 ist. Nun wird $2 \times 90 \times 9 = 1620$. Daher kann das doppelte Product höchstens in die Stelle der Tausende steigen; bleibt aber, bey kleinern Wurzeln, auch in der Stelle der Hunderte oder der Zehner.

Das Quadrat des zweyten Theils, d. h. das Product eines Einers in sich selbst, muß seine niedrigste Stelle in den Einern haben und kann höchstens in die Zehner steigen, da das Quadrat des größten Einers, oder $9 \times 9 = 81$ ist.

II. Da 99 die größte zweyzifferige Wurzel ist, so muß auch $99 \times 99 = 9801$ das größte Quadrat von irgend einer zweyzifferigen Wurzel seyn. Da nun das Quadrat der kleinsten zweyzifferigen Zahl, d. h. das Quadrat von 10, oder $10 \times 10 = 100$ ist, so muß jede gegebene drey oder vierzifferige Zahl eine zweytheilige Quadratwurzel haben. Wenn daher eine Zahl von drey oder vier Ziffern von der Rechten zur Linken in Classen getheilt, und der ersten Classe zwey Ziffer; der zweyten aber zwey oder eine Ziffer gegeben wird, so hat die Quadratwurzel dieser Zahl so viele Ziffer, als es Classen sind. Wären z. B. 8796 und 748 die gegebenen Zahlen, so ständen sie, nach dieser Classeneintheilung, also: 87 | 96 | und 7 | 48.

In der niedrigsten Ziffer der linken Classe fängt das Quadrat des ersten Wurzeltheils, in der höchsten Ziffer der rechten Classe das doppelte Product aus dem ersten Theile in den zweyten, und in der folgenden Ziffer dieser Classe das Quadrat des zweyten Wurzeltheils an, da diese drey Ziffer in den Ordnungen der Hunderter, Zehner und Einer aufeinander folgen.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Was versteht man unter dem Quadrate einer Zahl? Was heißt die Quadratwurzel? Wodurch kam das Wort Quadrat in die Arithmetik? Was heißt es, aus einer Zahl die Quadratwurzel ausziehen? Welches Zeichen hat man dafür? Was ist eine eintheilige, zweytheilige, dreytheilige Wurzel? (§. 1.).

II. Aus welchen Stücken besteht das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel? Erläuterung in Zahlen? (§. 2.).

III. Welche Grenzen hat das Quadrat des ersten Theils? Welche Grenzen hat das doppelte Product aus dem ersten Theil in den zweyten? Welche Grenzen hat das Quadrat des zweyten Theils? Wieviele Theile muß die Quadratwurzel einer 3 oder 4 zifferigen Zahl haben? (§. 3.).

II. Lehrübung.

Die Ausziehung der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen.

§. 1.

Die Quadratwurzel jeder drey- und vierziffe- rigen Zahl zu finden.

Aus den bisher entwickelten Sätzen ergibt sich die Richtigkeit folgender Regeln:

I. Man theile die gegebene drey- oder vierzifferige Zahl von der Rechten zur Linken in Classen, so entstehen zwey Classen und die Zahl hat zwey Wurzeltheile.

II. Man suche nach dem Einmaleins das größte Quadrat, welches von der linken Classe abgezogen werden kann, ziehe es wirklich davon ab und setze seine Quadratwurzel, als ersten Wurzeltheil, zur Rechten der gegebenen Zahl neben einen Absönderungsstrich.

III. Wenn (in II.) ein Rest bleibt, so drückt dieser dasjenige aus, was das doppelte Product in diese Classe übertragen hat. Setzt man daher neben diesen Rest die folgende Ziffer der Zahl, so muß in den hierdurch erhaltenen Ziffern das doppelte Product vom ersten Theile in der zweyten enthalten seyn.

IV. Verdoppelt man den ersten Wurzeltheil, und dividirt damit in die erhaltene Zahl, so muß der Quotient den zweyten Wurzeltheil geben. Denn wenn man mit 2a in 2ab dividirt, so muß b zum Quotienten entstehen. Diesen zweyten Wurzeltheil

multiplicire man mit dem Divisor und ziehe das Product vom Dividenden ab.

V. Setzt man neben den etwaigen Rest die niedrigste Ziffer der gegebenen Zahl, so muß in dem, was hierdurch entsteht, das Quadrat des zweyten Theils enthalten seyn. Man erhebe daher diesen zweyten Theil zum Quadrate, so ist dieses entweder eben so groß, als die Zahl, wovon es abgezogen werden soll, oder es ist größer oder kleiner, als dieselbe. Im ersten Falle ist die gegebene Zahl ein vollkommenes Quadrat und die gefundene Wurzel ihre genaue Quadratwurzel.

VI. Im zweyten Falle aber muß man den (in IV.) gefundenen Quotienten um eine Einheit vermindern, dann wieder nach IV. und V. verfahren, bis das Quadrat des zweyten Theils von der Zahl in V. abgezogen werden kann.

Im dritten Falle von V. zeigt dieses an, daß die gefundene Wurzel jene sey, deren Quadrat der gegebenen Zahl am Nächsten kömmt und der gebliebene Rest gibt an, um wie viel diese Zahl größer, als das Quadrat der gefundenen Wurzel ist. Wird daher diese Wurzel zum Quadrate erhoben und der gebliebene Rest dazu addirt, so muß die zuerst gegebene Zahl hieraus hervorgehen.

Nachstehende Beyspiele werden diese Regeln genugsam aufklären.

I. II.

I. √ 7 | 8. 4. (2 8 Wurzelth.

Quadr. des I. Th. 4

das dopp. Prod. steckt in 38

der dopp. I. Wurz. Th. . . (4)

das dopp. Prod. 32

64

Quadr. d. II. Th. 64

00

Probe.

28
28 } Wurzel

224

56

784 Quadrat.

I. II.

II. √ 72 | 2. 5. (8 5 Wurzelth.

Quadr. d. I. Th. 64

das dopp. Prod. steckt in . 82

der dopp. I. Wurz. Th. . (16)

dopp. Prod. aus I. in II. 80

25

Quadr. d. II. Th. 25

00

Probe.

85
85 } Wurzel

425

680

7225 Quadrat.

I. II.

III. √ 14 | 4. 4. (3 8 Wurzeltheile
9 Quadr. d. I. Theils

54

(6) der dopp. I. Theil
48 dopp. Prod. aus I. in II.

64

64 Quadr. des II. Theils

00

Hätte man hier bey der Division mit 6 in 54 zum Quotienten 9 genommen, so wäre, weil $6 \times 9 = 54$ ist, kein Rest geblieben und man hätte nachher das Quadrat von 9 d. h. 81 von der letzten Ziffer 4 abziehen müssen, was nicht möglich ist. Daher durfte nur 8 als II. Wurzeltheil gesetzt werden.

I. II.

IV. √ 89 | 84 (9 4 Wurzeltheile
81 Quadr. des I. Theils

88

(18) dopp. I. Theil
72 dopp. Prod. aus I. in II.

164

16 Quadr. des II. Theils

148 Rest.

Probe.

94 } Wurzel
94 }

376

846

addirt { 8836 Quadrat von 96
148 Rest

8984 die gegebene Zahl.

§. 2.

Bestimmung der Theile der Quadratzahlen mehrzifferiger Wurzeln.

Hier muß man vor allem die Theile bestimmen, woraus die Quadrate von drey- oder mehrzifferigen Wurzeln bestehen. In der dreyzifferigen Wurzel $p + q + r$ setze man $p + q = a$ und $r = b$, so wird $p + q + r = a + b$, und $(p + q + r)^2 = (a + b)^2$. Allein $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Daher wird nun: $a^2 = (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$, $2ab = 2(p + q)r$ und $b^2 = r^2$.

Folglich ist $(p + q + r)^2 = p^2 + 2pq + q^2 + 2(p + q)r + r^2$ oder das Quadrat einer dreytheiligen Wurzel enthält fünf Stücke:

1) Das Quadrat des ersten Theils,

2) das doppelte Product vom ersten Theil in den zweyten,

3) das Quadrat des zweyten Theils,

4) das doppelte Product aus der Summe des ersten und zweyten Theils in den dritten, und

5) das Quadrat des dritten Theils.

Wäre 468 die gegebene Wurzel, so hätte man $p = 400$ $q = 60$ und $r = 8$ und man erhielte zur Bildung ihres Quadrats folgende Rechnung:

$p^2 = 400 \times 400$	$=$	160000
$2pq = 2 \times 400 \times 60$	$=$	48000
$q^2 = 60 \times 60$	$=$	3600
$2(p + q)r = 2 \times 460 \times 8$	$=$	7360
$r^2 = 8 \times 8$	$=$	64
Folglich ist 468^2	$=$	219024

Die gewöhnliche Rechnung gibt ebenfalls $468 \times 468 = 219024$.

Wollte man die Theile bestimmen, woraus das Quadrat einer viertheiligen Wurzel besteht, so könnte man sie $p + q + r + s$ nennen und $p + q + r = a$ und $s = b$ setzen, wo denn wieder $(a + b)^2 = (p + q + r + s)^2$ würde. Dies gibt aber folgende Rechnung:

$a^2 = (p + q + r)^2 = p^2 + 2pq + q^2 + 2(p + q)r + r^2$, $2ab = 2(p + q + r)s$ und $b^2 = s^2$.

Daher besteht das Quadrat einer viertheiligen Wurzel aus folgenden sieben Stücken:

1) Aus dem Quadrate des ersten Theils,

2) aus dem doppelten Producte des 1ten in den 2ten Theil,

3) aus dem Quadrate des zweyten Theils,

4) aus einem doppelten Producte von der Summe des ersten und zweyten Theils in den dritten,

5) aus dem Quadrate des dritten Theils,

6) aus dem doppelten Producte von der Summe des ersten, zweyten und dritten Theils in den vierten und

7) aus dem Quadrate des vierten Theils.

Wenn man sich irgend eine vierzifferige Zahl als Wurzel wählt, so kann man wieder durch Berechnung und Summirung dieser sieben Stücke leicht ihre Quadratzahl bilden.

Betrachtet man die bisher gefundenen Bestandtheile der Quadrate von zwey- drey- und viertheiligen Wurzeln, so ist klar, daß für jeden zur Wurzel kommenden neuen Theil zwey neue Stücke zum Quadrate kommen;

erſtlich ein doppeltes Product aus der Summe aller vorhergehenden Theile in den neuen und dann ein Quadrat dieſes neuen Theils. Hierdurch laſſen ſich dieſe Theile der Quadratzahlen aller mehrzifferigen Wurzeln leicht angeben.

Es iſt z. B. $(p + q + r + s + t)^2 = p^2 + 2pq + q^2 + 2(p + q)r + r^2 + 2(p + q + r)s + s^2 + 2(p + q + r + s)t + t^2$.

Auf gleiche Art wird $(p + q + r + s + t + u)^2 = p^2 + 2pq + q^2 + 2(p + q)r + r^2 + 2(p + q + r)s + s^2 + 2(p + q + r + s)t + t^2 + 2(p + q + r + s + t)u + u^2$.

Zur Uebung laſſen ſich die Quadrate vieltheiliger Wurzelzahlen nach dieſen Formeln in Zahlen berechnen.

§. 3.

Fernere Vorderſätze zur Ausziehung mehrziffe-riger Quadratwurzeln.

Wenn man ſich eine mehrzifferige Zahl z. B. 73248 als Quadratwurzel denkt und dieſelbe zum Quadrate erhebt, ſo muß dieſes zuerſt das Quadrat von 70000, d. h. 4900000000 enthalten. Das darauf folgende doppelte Product iſt ein doppeltes aus 70000 in 3000 und muß demnach 7 Nullen erhalten. Das Quadrat von 3000 gibt ſodann eine 9 mit 6 Nullen; das hierauf folgende doppelte Product aus 3000 in 200 gibt eine 6 mit 5 Nullen, das Quadrat von 200 eine 4 mit 4 Nullen u. ſ. w. d. h. jedes folgende Stück des Quadrats wird mit ſeiner niedrigſten Ziffer in einer zehnfach niedrigern Ord-

nung anfangen, bis zum Quadrate der niedrigsten Ziffer 8, welche in den Einern anfängt. Daher hat auch hier das nämliche Statt, was bereits oben von den Theilen der Quadrate zweyzifferiger Zahlen bemerkt worden ist.

Soll man nunmehr, bey einer vielzifferigen Zahl, die Anzahl der Theile bestimmen, woraus ihre Quadratwurzel besteht, so theile man sie ebenfalls von der Rechten zur Linken in Classen, gebe jeder Classe zwey Ziffer, so ist die Zahl dieser Classen auch der Zahl jener Wurzeltheile gleich, wenn sich auch in der linken Classe nur eine Ziffer befindet. Hätte die Zahl 5 oder 6 Ziffer, so müßte ihre Quadratwurzel dreytheilig seyn. Denn wäre sie zweytheilig, so könnte sie höchstens 99 seyn, dessen Quadrat 9801 ist; wäre sie aber vierzifferig, so müßte sie wenigstens 1000 seyn, wovon das Quadrat 1000000 und somit größer, als die gegebene Zahl wäre.

Auf ähnliche Weise müssen 11 oder 12zifferige Zahlen 6zifferige Quadratwurzeln haben. Denn eine fünftheilige Wurzel gibt ein Quadrat, welches aus 9 Stücken besteht und daher höchstens 10 Ziffer enthält, folglich kleiner, als die gegebene Zahl seyn muß. Dagegen gibt eine siebentheilige Wurzel im Quadrate 13 Stücke, und somit eine Zahl von wenigstens 13 Ziffern, welche größer als die gegebene Quadratzahl seyn muß.

§. 4.

Bestimmung der Wurzeltheile aus vielziffe-rigen Zahlen.

Aus den bisher vorgetragenen Lehren ergibt sich die Richtigkeit folgender Regeln:

I. Nachdem man die gegebene Zahl auf bekannte Weise von der Rechten zur Linken in Classen getheilt und hierdurch die Zahl ihrer Wurzeltheile erfahren hat, bilde man die zugehörige Formel in Buchstaben, welche als Leitfaden zum Auffinden der Wurzel dient.

II. Nachdem man das größte Quadrat von der linken Classe weggenommen hat, setze man dessen Wurzel, als ersten Wurzeltheil, zur Rechten der gegebenen Zahl.

III. Nimmt man zu dem, in 2 gebliebenen Reste die folgende Ziffer der Zahl, und dividirt mit dem doppelten ersten Wurzeltheil in dieses Ganze, so ist der Quotient der zweyte Wurzeltheil. Man multiplicire ihn mit dem doppelten ersten Theile und ziehe dieses Product vom Dividenden ab.

IV. Zudem in III. etwa gebliebenen Reste nehme man die folgende Ziffer der Zahl, bilde das Quadrat des zweyten Wurzeltheils, ziehe es von diesem Ganzen ab, so ist, wenn dieser Abzug geschehen kann, der zweyte Wurzeltheil der richtige. Könnte der Abzug aber nicht geschehen, so müßte man diesen Wurzeltheil um eine Einheit vermindern, und auf ähnliche Weise fortfahren.

V. Setzt man zu dem in 4 gebliebenen Reste die folgende Ziffer der Zahl, so enthält dieses Ganze das

doppelte Product aus der Summe des ersten und zweyten Theils in den dritten. Dividirt man daher mit dem Doppelten der zwey Wurzeltheile in dieses Ganze, so gibt der Quotient den dritten Theil der Wurzel, welchen man mit dem Divisor multiplicirt, um dieses Product vom Dividenden abzuziehen. Zu dem bleibenden Reste nimmt man die folgende Ziffer der Zahl und zieht von diesem Ganzen das Quadrat des dritten Theiles ab, wo es sich denn daraus, ob dieser Abzug geschehen kann oder nicht, ergibt, ob der dritte Wurzeltheil richtig oder zu groß gefunden worden ist, in welchem letztern Falle derselbe um eine oder einige Einheiten vermindert werden muß.

VI. Zu dem in V. gebliebenen Reste kömmt wieder die folgende Ziffer der Zahl, und man fährt, um die übrigen Wurzeltheile zu finden, immer nach III, IV. V. fort, indem für die nachfolgenden Divisoren jedesmal die doppelten Producte aus der Summe aller bereits gefundenen Wurzeltheile genommen werden. Hierdurch kömmt man bis zum letzten Theile der Wurzel, dessen Quadrat, wenn es abgezogen ist, entweder einen Rest übrig läßt, oder nicht. In jenem Falle ist die gegebene Zahl um diesen Rest größer, als das Quadrat der gefundenen Wurzel; in diesem aber ist sie das vollkommene Quadrat dieser Wurzel.

VII. Daher macht man die Probe über diese Rechnung dadurch, daß die gefundene Wurzel mit sich selbst multiplicirt und der etwa gebliebene Rest dazu addirt wird, um die gegebene Zahl wieder hervorzubringen.

Nachstehende Beyspiele dienen zur Erläuterung:

a b c

I. $\sqrt{73\,|\,44\,|\,49}$ (8 5 7 Wurzeltheile.

$64 = a^2$

94

$(16) = ,2a$

$90 = 2ab$

144

$25 = b^2$

1194

$(170) = 2\,(a + b)$

$1190 = 2\,(a + b)\,c$

49

$49 = c^2$

00

Probe.

857
857 } Wurzel.

5999
4285
6856

734449 Quadrat.

II. $\sqrt{78\,|\,54\,|\,73\,|\,92}$ (8 8 6 2 — a b c d

64 = a^2

145

(16) = 2a

128 = 2ab

174

64 = b^2

1107

(176) = 2 (a + b)

1056 = 2 (a + b) c

513

36 = c^2

4779

(1772) = 2 (a + b + c)

3544 = 2 (a + b + c) d

12352

4 = d^2

12348 Rest.

Probe.

8862 } Wurzel.
8862 }

17724

53172

70896

70896

78535044 Quadrat.

12348 Rest.

78547392 gegebene Zahl.

a b c d e

III. $\sqrt{82\,|\,96\,|\,85\,|\,48\,|\,97}$ (9 1 0 8 7

$81 = a^2$

19

$(18) = 2a$

$18 = 2ab$

16

$1 = b^2$

158

$(182) = 2\,(a + b)$

$000 = 2\,(a + b)\,c$

1585

$0 = c^2$

15854

$(1820) = 2\,(a + b + c)$

$14560 = 2\,(a + b + c)\,d$

12948

$64 = d^2$

128849

$(18216) = 2\,(a + b + c + d)$

$127512 = 2\,(a + b + c + d)\,e$

13377

$49 = e^2$

13328 Reſt.

Probe.

91087 } Wurzel.
91087 }

637609
728696
91087
819783

8296841569 Quadrat.
13328 Rest.

8296854897 gegebene Zahl.

§. 5.

Uebungs-Fragen.

I. Wie wird die Quadratwurzel aus jeder ganzen Zahl, welche 3 oder 4 Ziffer hat, gefunden? Was ist z. B. $\sqrt{857}$? $\sqrt{9873}$? $\sqrt{5142}$? $\sqrt{5732}$? (§. 1.)

II. Wie findet man die Stücke, woraus die Quadrate 3- oder 4zifferiger Wurzeln bestehen? Wie heißt das allgemeine Gesetz zur Bestimmung dieser Stücke bey mehrzifferigen Zahlen? Wie kann man die Quadrate solcher Wurzeln in Zahlen berechnen? (§. 2.)

III. Wie bestimmt man die Zahl der Wurzeltheile von irgend einer in Ziffern gegebenen Zahl? Worauf beruhet die Richtigkeit dieser Vorschriften? (§. 3.)

IV. Wie findet man die Quadratwurzel aus jeder gegebenen ganzen Zahl? Wie macht man die Probe über die Richtigkeit der gefundenen Wurzel? (§. 4.) Was ist $\sqrt{97829}$? $\sqrt{127642}$; $\sqrt{3876247}$; $\sqrt{382764813}$?

III. Lehrübung.

Ausziehung der Quadratwurzel durch Annäherung.

§. 1.

Entstehung und Begriff der Irrationalzahlen.

Man denke sich die ersten zehn ganzen Zahlen und die ihnen zugehörigen Quadrate, nämlich:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

und nehme zwischen zwey unmittelbar auf einander folgenden Quadraten eine willkührliche Zahl z. B. zwischen 49 und 64 die Zahl 58, so entsteht die Frage: Was ist $\sqrt{58}$?

Da 58 größer als 49, aber kleiner als 64 ist, so muß $\sqrt{58}$ größer als 7 und kleiner als 8 seyn. Wäre sie genau anzugeben, so müßte sie 7 nebst einem ächten Bruche seyn. Stellt man sich unter $\frac{n}{m}$ diesen Bruch vor, so wäre $\sqrt{58} = 7 + \frac{n}{m}$ und es müßte $58 = \left(7 + \frac{n}{m}\right)^2$ d. h. es müßte $58 = 49 + 2 \times 7 \times \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}$ seyn. Da aber $\frac{n}{m}$ ein ächter Bruch ist, so muß $\frac{n^2}{m^2}$ ebenfalls ein ächter, noch kleinerer Bruch seyn. Daher wird $\left(7 + \frac{n}{m}\right)^2$ niemals eine reine ganze Zahl und somit auch nicht die Zahl 58 bilden können.

Es gibt daher unter allen möglichen ächten Brüchen keinen einzigen, welcher, zu 7 gesetzt, die vollkommen genaue Quadratwurzel von 58 bilden könnte. Daher ist $\sqrt{58}$ eine solche Zahl, deren genauer Werth weder durch Ganze, noch durch Bruchtheile angegeben werden kann. Man nennt solche Zahlen Irrationalzahlen, und überzeugt sich sehr bald, daß sie durch das Ausziehen der Quadratwurzeln in vielen Fällen entstehen müssen. So befinden sich z. B. unter den ersten ganzen Zahlen von 1 bis 100 nur 10 vollkommene Quadrate; die übrigen 90 Zahlen sind unvollkommene Quadrate und ihre Quadratwurzeln müssen Irrationalzahlen seyn.

Da es auf diese Weise mehr unvollständige, als vollkommene Quadratzahlen gibt, so muß nunmehr die Methode erklärt werden, wie man den Werth ihrer Quadratwurzeln so genau finden kann, als es der jedesmalige Zweck der Anwendung erfodert.

§. 2.

Die Quadratwurzeln unvollständiger Quadrate durch Annäherung zu finden.

Gleichwie man Brüche dadurch zum Quadrate erhebt, daß ihr Zähler und Nenner quadrirt wird, so findet man auch umgekehrt die Quadratwurzel eines Bruches dadurch, daß diese Wurzel aus seinem Zähler und aus dem Nenner gefunden wird. So ist z. B. $\sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}} = \frac{7}{10}$; $\sqrt{\frac{11}{23}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{23}}$, wo sowohl der Zähler, als der Nenner eine Irrationalzahl darstellt.

Soll nun z. B. $\sqrt{5}$ gefunden werden, so setze man $\sqrt{5} = \sqrt{\frac{500}{100}} = \frac{\sqrt{500}}{10}$. Fände man daher von 500 die zweytheilige Wurzel, so müßte sie mit 10 dividirt werden und man hätte $\sqrt{5}$ nicht nur in Ganzen, sondern auch in Zehntel gefunden.

Setzte man aber $\sqrt{5} = \sqrt{\frac{50000}{10000}} = \frac{\sqrt{50000}}{100}$ so würde $\sqrt{50000}$ eine dreyzifferige Zahl geben, welche durch 100 dividirt, die $\sqrt{5}$ in Einern, Zehntel und Hunderttel darstellte.

Nähme man $\sqrt{5} = \sqrt{\frac{5000000}{1000000}} = \frac{\sqrt{5000000}}{1000}$, so würde $\sqrt{5000000}$ eine vierzifferige Zahl geben, welche mit 1000 dividirt, die $\sqrt{5}$ in Einern, Zehntel, Hunderttel und Tausendtel angäbe.

Hieraus folgt die allgemeine Regel: Um aus einem unvollständigen Quadrate die $\sqrt{}$ durch Annäherung zu finden, hänge man an diese Zahl so viele Paare von Nullen, als auf wie viele Decimalbruchstellen jene Wurzel gefunden werden soll und rechne nun auf die gewöhnliche Weise. Folgende Beyspiele erläutern dieses:

a b c d e

I. $\sqrt{}$ 8 | 00 | 00 | 00 | 00 (2, 8 2 8 4

$4 = a^2$

$2a = 4 \mid 40$

$2ab = 32$

80

$b^2 = 64$

$2(a + b) = 56 \mid 160$

$2(a + b)c = 112$

480

$c^2 = 4$

$2(a + b + c) = 564 \mid 4760$

$2(a + b + c)d = 4512$

2480

$d^2 = 64$

$2(a + b + c + d) = 5656 \mid 24160$

$2)a + b + c + d)e = 22624$

15360

$e^2 = 16$

15344 Rest.

Probe.

2,8284 } Wurzel.
2,8284

113136
226272
56568
226272
56568

7,99984656 Quadrat.
15344 Rest.

8,00000000 gegebene Zahl.

II. $\sqrt{\ 1\ |\ 27\ |\ 00\ |\ 00\ |\ 00\ |\ 00\ |\ 00}$ (11,26942

1

2 | 2

2

7

1

22 | 60

44

160

4

1560

1344

2160

36

2252 | 21240

20268

9720

81

22538 | 96390

90152

62380

16

225388 | 623640

450776

1728640

4

1728636 Reſt.

Probe.

11,26942 } Wurzel.
11,26942 }

2253884
4507768
10142478
6761652
2253884
1126942
1126942

126,9998271364 Quadrat.
1728636 Rest.

127,0000000000 gegebene Zahl.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Was sind Irrationalzahlen? Wie entstehen sie durch Ausziehung der Quadratwurzeln? Beweis ihres Daseyns?

II. Wie verfährt man, um die Quadratwurzeln solcher unvollständiger Quadrate in Zehntel, Hunderttel, Tausendtel u. s. w. zu finden? Wie heißt die allgemeine Regel dazu? Grund derselben? Wie viele Decimalbruchstellen hat man bey der Wurzelausziehung durch Annäherung zu finden? Was ist $\sqrt{11}$?; $\sqrt{28}$; $\sqrt{319}$; $\sqrt{4011}$?

IV. Lehrübung.

Quadratwurzeln aus gemeinen Brüchen und aus Decimalbrüchen.

§. 1.

Die Quadratwurzeln gemeiner Brüche zu finden.

Soll man aus einem gewöhnlichen Bruche die Quadratwurzel finden, so heißt die allgemeine Regel: Man ziehe diese Wurzel sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner des Bruchs. So wird z. B. $\sqrt{\frac{7}{12}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} = \frac{2,4494897}{3,4641016}$; $\sqrt{\frac{85}{94}}$ $= \frac{\sqrt{85}}{\sqrt{94}} = \frac{9,2195445}{9,6953597}$; $\sqrt{\frac{501}{511}} = \frac{\sqrt{501}}{\sqrt{511}} = \frac{22,3830292}{22,6053091}$ u. s. w. wo man diese Brüche, durch Ausführung der Division des Nenners in den Zähler, in einzelne Decimalbrüche verwandeln könnte.

Da jedoch das Wurzelausziehen auf viele Decimalstellen eine etwas beschwerliche Rechnung ist, so kann man dasselbe beym Ausziehen der Quadratwurzeln aus gemeinen Brüchen dadurch ersparen, daß man den Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs mit seinem Nenner multiplicirt, wodurch der Werth des Bruchs unverändert bleibt; sein Nenner aber in ein vollkommenes Quadrat verwandelt wird. So ist z. B. $\sqrt{\frac{7}{11}} = \sqrt{\frac{7 \times 11}{11 \times 11}} = \sqrt{\frac{77}{121}} = \frac{\sqrt{77}}{\sqrt{121}}$

$= \frac{\sqrt{77}}{11} = \frac{3,3166248}{11}$. Ferner ist $\sqrt{\frac{8}{13}} = \sqrt{\frac{8 \times 13}{13 \times 13}} = \frac{\sqrt{104}}{13} = \frac{10,1980390.}{13}$

Man könnte auch den Zähler des Bruchs dadurch zu einem vollkommenen Quadrate bilden, daß sowohl Zähler als Nenner desselben mit dem Zähler multiplicirt würde. Allein da hier eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch dividirt werden muß, so ist der Gewinn für das practische Rechnen weniger groß.

§. 2.

Aus Decimalbrüchen die Quadratwurzel zu finden.

I. Da die Decimalbrüche durchaus nach dem decadischen Gesetze der Arithmetik gebildet sind, so kann man sie auch, hinsichtlich der Auffindung ihrer Quadratwurzeln, wie ganze Zahlen behandeln. Sind es gemischte Decimalbrüche, so muß jedesmal zwischen die Stelle der Einer und der Zehntel ein Classenstrich kommen. Auch muß die Zahl ihrer Decimalbruchstellen immer eine gerade seyn, da die 100tel, 10000tel, 1000000tel u. s. f., der Ordnung nach 10tel, 100tel, 1000tel u. s. f. zur Quadratwurzel geben; die 1000tel 100000tel u. s. w. aber ihre Quadratwurzeln zwischen 10tel und 100tel, zwischen 100tel und 1000tel u. s. f. haben. Wenn daher der gegebene Decimalbruch, dessen Quadratwurzel man finden soll, eine ungerade Zahl von Bruchstellen hat, so muß man zur Rechten eine Nulle beyfügen, wodurch dessen Werth nicht ver-

ändert und die richtige Classenabtheilung möglich wird.

II. Diese Regeln werden durch nachstehende Beyspiele erläutert:

$$\sqrt{0{,}275625} = \sqrt{\frac{275625}{1000000}} = \frac{\sqrt{275625}}{1000} = \frac{525}{1000}$$

$= 0{,}525.$

$$\text{Ferner } \sqrt{0{,}893025} = \sqrt{\frac{893025}{1000000}} = \frac{\sqrt{893025}}{1000}$$

$$= \frac{946}{1000} = 0{,}945.$$

$$\text{Ferner } \sqrt{0{,}55225} = \sqrt{\frac{55225}{1000000}} = \frac{\sqrt{552250}}{1000000}$$

$$= \frac{235}{1000} = 0{,}235;$$

$$\text{oder } \sqrt{0{,}27225} = \sqrt{\frac{27225}{100000}} = \frac{\sqrt{272250}}{1000000} =$$

$$\frac{165}{1000} = 0{,}165;$$

oder $\sqrt{27{,}5625} = 5{,}25$; $\sqrt{18{,}8356} = 4{,}34$; $\sqrt{6480{,}25} = 80{,}5$; $\sqrt{8742{,}25} = 93{,}5$.

III. Hierauf beruht auch das Verfahren, aus gemeinen Brüchen dadurch die Quadratwurzeln zu finden, daß man sie zuerst in Decimalbrüche verwandelt und aus diesen die Quadratwurzeln sucht. Wenn die Division hierbey nicht abbricht, sondern ins Unendliche geht, so müssen die Decimalbruchstellen immer nach gerader Zahl gesucht werden.

Daher wird $\sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{0{,}625}$, wo man wenigstens noch eine Nulle anhängen müßte. Ferner

ist $\sqrt{\frac{4}{7}} = \sqrt{0{,}57142857\ldots}$ ferner $\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{0{,}83333333\ldots}$ desgleichen $\sqrt{\frac{17}{5}} = \sqrt{3{,}4}$; $\sqrt{\frac{146}{8}} = \sqrt{18{,}25}$ u. s. w.

§. 3.

Einige Anwendungen von der Lehre der Quadratwurzel-Ausziehung.

I. Wie man zu drey gegebenen Zahlen eine vierte Proportionalzahl findet, ist bereits oben erklärt worden. Die Aufgabe aber: zu zwey gegebenen Zahlen eine mittlere geometrische Proportionalzahl zu finden, kann nunmehr erst gegeben werden, da sie auf dem Ausziehen der Quadratwurzel beruht.

Soll man z. B. zwischen 8 und 29 die mittlere geometrische Proportionalzahl $= x$ finden, so ist $8 : x = x : 29$, folglich $x^2 = 8 \times 29 = 232$ und $x = \sqrt{232} = 15{,}2315462\ldots$

Ferner in $17 : x = x\ 38$, wird $x = \sqrt{646} = 25{,}4165300\ldots$

Desgleichen in $46 : x = x : 11$ ist $x = \sqrt{506} = 22{,}4944437$ u. s. w.

II. Wenn man den Werth der Edelsteine bestimmt, so pflegt man anzunehmen, daß derselbe nach den Quadratzahlen ihrer Gewichte zunimmt; so, daß bey dem 2, 3 oder 4mal so großen Gewichte ihr Werth 4, 9 oder 16mal größer ist. Wenn nun ein Diamant,

welcher 6 Grane wiegt, $5\,1/2$ fl. werth ist, welches Gewicht muß ein anderer haben, dessen Werth 3000 fl. beträgt? Setzt man das zu findende Gewicht $= x$, so wird $5\frac{1}{2} : 3000 = 6^2 : x^2$, folglich

$\frac{11}{2} : 3000 = 36 : x^2$ oder $11 : 6000 = 36 : x^2$ somit

$x^2 = \frac{6000 \times 36}{11} = \frac{216000}{11}$. Daher wird $x =$

$\sqrt{\frac{216000}{11}} = \frac{\sqrt{216000 \times 11}}{11} = \frac{\sqrt{2376000}}{11} =$

$\frac{1541}{11} = 140\,\frac{1}{11}$. Daher müßte der gegebene Diamant

$140\,1/11$ Grane wiegen.

III. Ein quadratisches Grundstück hat 160 Quadratruthen in seiner Fläche. Wie viele Weinstöcke können darauf gepflanzt werden, wenn je zwey derselben einen Zwischenraum von $2\,1/2$ Schuh haben?

Vor allem ist hier als Lehrsatz zu bemerken, daß man den Inhalt eines Quadrats findet, wenn das Maas seiner Seite mit sich selbst multiplicirt wird. Betrüge dieses z. B. 12 Ruthen, so wäre der Inhalt des Quadrats $12 \times 12 = 144$ Quadratruthen, d. h. man könnte seine Fläche mit 144 kleinen Quadraten, deren jedes 1 Ruthe lang und 1 Ruthe breit wäre, genau ausfüllen. Weil nun das gegebene Quadrat 160 Quadratruthen enthält, so ist seine Seite $= \sqrt{160} = 12,64$ Ruthen, oder, wenn man 10 Schuh auf eine Ruthe rechnet, $= 126,4$ Schuhen. Weil nun der Abstand zweyer Weinstöcke $= 2\,1/2 = 2,5$ Schuhe beträgt, so muß man mit 2,5 in 126,4

dividiren, um die Zahl der Stöcke zu finden, welche auf einer Seite dieses Quadrates Raum finden. Der Quotient ist 59,561, und man muß ihn, um die Zahl aller Weinstöcke zu bestimmen, welche auf dem ganzen Felde Platz haben, einmal mit sich selbst multipliciren, welches 2556,3136 gibt, wofür man 2556 nehmen muß.

Zwölfter Lehrgang.

Die Lehre von der Ausziehung der Cubicwurzel.

I. Lehrübung.

Entwickelung einiger Vorbereitungssätze.

§. 1.

Erklärung einiger Grundbegriffe.

I. Wenn man eine Zahl zweymal mit sich selbst multiplicirt, wobey sie dreymal als Factor gesetzt wird, so heißt dieses Product die dritte Potenz oder der Würfel (Cubus) dieser Zahl, welche man, in Bezug auf diesen Würfel, die Wurzel der dritten Potenz, oder die Cubicwurzel nennt. So ist z. B. $4 \times 4 \times 4$ oder 64 der Würfel von 4 und diese 4 die Cubicwurzel von 64. Ferner ist 1728 der Würfel von 12, weil $12 \times 12 \times 12 = 1728$; auf

gleiche Art ist der Würfel von $\frac{5}{8} = \frac{125}{512}$, da

$$\frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{125}{512}.$$

Das Wort Würfel ist aus der Geometrie in die Arithmetik aufgenommen worden. Man beweiset nämlich in der Raumlehre, daß man den körperlichen Inhalt eines Würfels findet, wenn dessen Seite gemessen und ihr Maas zweymal mit sich selbst multiplicirt wird. Wäre z. B. die Seite eines Würfels $= 5$ Schuhe, so würde sein Inhalt $= 5 \times 5 \times = 125$ Cubicfuße betragen, d. h. man könnte in diesen Würfel 125 kleine Würfel stellen, deren jeder 1 Schuh lang, 1 Schuh breit und 1 Schuh hoch ist. Man kann sich daher unter jeder Würfelzahl einen geometrischen Cubus vorstellen und es stellt z. B. 1000 einen solchen Würfel dar, dessen Seite $= 10$ ist.

II. Aus einer gegebenen Zahl die Cubicwurzel ziehen, heißt soviel, als eine Zahl finden, welche zweymal mit sich selbst multiplicirt, diese Zahl wieder hervorbringt. Weil die Cubicwurzel die Wurzel der dritten Potenz ist, so setzt man um sie zu bezeichnen die Ziffer 3 in die Oeffnung des Wurzelzeichens, und es heißt z. B. $\sqrt[3]{729} = 9$ so viel, als die Cubicwurzel von 729 ist $= 9$. Aber $\sqrt[3]{8746}$ heißt soviel als man soll eine Zahl finden, welche zweymal mit sich selbst multiplicirt, diese 8746 zum Producte gibt.

III. In diesem Lehrgange soll gezeigt werden, wie man aus allen Zahlen, sie seyen ganze oder gebrochene, die Cubicwurzeln entweder ganz genau,

oder mit solcher Schärfe finden kann, daß es für jede Anwendung genüget. Da die Ausziehung der Cubicwurzel mit jener der Quadratwurzel bedeutende Aehnlichkeit hat, so wird dieser Lehrgang in seiner Entwickelung dem unmittelbar vorhergegangenen ebenfalls ähnlich seyn.

§. 2.

Bestandtheile des Würfels zweyzifferiger Wurzeln.

I. Wenn man eine zweytheilige Wurzel zum Würfel erhebt, so enthält dieser folgende vier Stücke:

1) den Würfel des ersten Theils,

2) das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten,

3) das dreyfache Product aus dem ersten Theile in das Quadrat des zweyten und

4) den Würfel des zweyten Theils.

Diese Behauptung wird dadurch bewiesen, daß man die zweytheilige Wurzel $a + b$ zweymal mit sich selbst, oder $a^2 + 2ab + b^2$ noch einmal mit $a + b$ multiplicirt. Dieß gibt

$a^2 + 2ab + b^2$ Quadrat
$a + b$ Wurzel

$a^3 + 2a^2b + ab^2$
$a^2b + 2ab^2 + b^3$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ Würfel.

II. Zur Erläuterung in Zahlen sey $58 = 50 + 8$ die gegebene Wurzel, so ist

$a^3 = 50^3 = 125000$
$3a^2b = 3 \times 50^2 \times 8 = 3 \times 2500 \times 8 = 60000$
$3ab^2 = 3 \times 50 \times 8^2 = 150 \times 64 = 9600$
$b^3 = 8^3 = 512.$

Daher muß 125000 + 60000 + 9600 + 512 $= 127072 = 58^3$ seyn.

Man kann daher den Würfel jeder zweyzifferigen Zahl nach dieser Formel aus seinen vier Bestandtheilen zusammensetzen.

§. 3.

Folgerungen hieraus.

I. Wenn die Wurzel zweyzifferig ist, so stellt a den Zehner und b den Einer vor. Da nun a^3 der Würfel eines Zehners ist, so muß derselbe seine niedrigste Stelle in der Ordnung der Tausenden haben. Wäre $a = 90$ so würde $a^3 = 729000$ d. h. wenn der erste Wurzeltheil am größten ist, so erstreckt er sich höchstens in die Ordnung der Hunderttausende.

II. Das erste dreyfache Product oder $3a^2b$ enthält das Quadrat des Zehners a und muß daher nothwendig in den Hunderten anfangen. Es wird am größten seyn, wenn $a = 90$ und $b = 9$ ist, wo es $= 218700$ wird, und folglich auch zu den Hunderttausenden aufsteigt.

III. Das zweyte dreyfache Product, oder $3ab^2$ ist mit seiner niedrigsten Stelle in den Zehnern anfangend, da sein einer Factor a ein Zehner ist. Es wird am größten wenn $a = 90$ und $b = 9$ ist, wo es $= 21870$ wird; folglich in die Zehntausende aufsteigt.

IV. Der Würfel des zweyten Theils, oder b^3 muß, da b ein Einer ist, seine niedrigste Stelle in den Einern haben, und b^3 kann höchstens = 729 werden oder in die Hunderttte sich erheben.

V. Da der Würfel von 99 d. h. von der größten zweyzifferigen Wurzel = 970299; der Würfel von 10, als der kleinsten zweyzifferigen Zahl = 1000 ist, so folgt nothwendig, daß jede Zahl, welche aus 4, 5 oder 6 Ziffern besteht, eine zweyzifferige Cubicwurzel habe. Theilt man daher eine solche Zahl von der Rechten zur Linken in Classen, gibt der ersten Classe drey Ziffer, wo denn in der andern Classe 1, 2 oder 3 Ziffer stehen, so erkennt man in der Zahl dieser zwey Classen auch die Zahl der zwey Wurzeltheile.

VI. Denkt man sich z. B. $\sqrt[3]{}$ 875296, so ist die Abtheilung diese: $\sqrt[3]{}$ 875 | 296 | und man weiß sogleich, daß in der Stelle der 5 der Würfel von a, in der Stelle der 2 das Product $3a^2b$, in der Stelle der 9 das andere Product $3ab^2$ und in der Stelle der 6 der Würfel von b anfangen müsse. Sollte man aus den Zahlen 54328, oder 7965 die Cubicwurzeln finden, so wäre die Abtheilung folgende $\sqrt[3]{}$ 54 | 328 | und $\sqrt[3]{}$ 7 | 965 |.

VII. Nach diesen Vorbereitungen können die Cubicwurzeln aus 4, 5 und 6zifferigen Zahlen gefunden werden, wobey man, als nöthiges Hülfsmittel, folgendes Wurzeltäfelchen gebrauchen muß

Wurzeln . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Würfel . . .	1	8	27	64	125	216	343	512	729

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Was versteht man unter der dritten Potenz oder unter dem Würfel einer Zahl? Was ist dessen Cubicwurzel? Was heißt es: Aus einer gegebenen Zahl die Cubicwurzel ausziehen? Was ist der Zweck dieses Lehrgangs? (§. 1.)

II. Woraus besteht der Würfel einer zweytheiligen Wurzel? Wie beweiset man dieses? Wie kann man eine 2zifferige Zahl durch Hülfe dieser Formel zum Würfel erheben? (§. 2.)

III. Wo fängt a^3 an und wie hoch kann es steigen? Wo fängt $3a^2b$ an und wie hoch kann es aufsteigen? Wo fängt $3ab^2$ an und zu welcher Ordnung kann es sich erheben? Wie viele Wurzeltheile haben 4, 5 und 6 zifferige Cubiczahlen? Grund dieser Bestimmung? Bey einer solchen Würfelzahl zu bestimmen, in welcher Ziffer a^3 und $3a^2b$ und $3ab^2$ und b^3 anfangen muß? (§. 3.)

II. Lehrübung.

Die Ausziehung der Cubicwurzel aus ganzen Zahlen.

§. 1.

Die Cubicwurzel jeder 4, 5 oder 6 zifferigen Zahl zu finden.

Zur Auflösung dieser Aufgabe befolge man nachstehende Vorschriften:

I. Man theile die angegebene Zahl von der Rechten zur Linken dergestalt in zwey Classen, daß die rechte Classe drey Ziffer enthält.

II. Man ziehe den größten Würfel, welcher von der linken Classe abgezogen werden kann, wirklich von derselben ab, so ist seine Cubicwurzel der erste Wurzeltheil.

III. Da das Product $3a^2b$ in den Hundertten anfängt, so setze man die Hundertte der gegebenen Zahl neben den in II. gefundenen Rest, so muß dieses ganze das Product $3a^2b$ enthalten.

IV. Dividirt man daher mit dem dreyfachen Quadrate des ersten Wurzeltheils in die vorhin erhaltene Zahl, so muß der Quotient der zweyte Theil der Wurzel seyn, da $3a^2b$ durch $3a^2$ dividirt, zum Quotienten b gibt.

V. Man bilde nunmehr das Product $3a^2b$ in Zahlen, ziehe es ab und setze neben den etwaigen Rest die folgende Ziffer der gegebenen Zahl, so muß in diesem Ganzen das Product $3ab^2$ enthalten seyn, da es in den Zehnern anfängt.

VI. Man rechne daher dieses $3ab^2$ in Zahlen, ziehe es ab und schreibe neben den Rest die letzte Ziffer der gegebenen Zahl, so muß in diesem Ganzen der Würfel von b enthalten seyn. Daher bilde man ihn in Zahlen, ziehe ihn gehörig ab, so ist, wenn kein Rest bleibt, die gegebene Zahl ein vollkommener Würfel, dessen Cubicwurzel man genau gefunden hat.

Dieses Verfahren wird aus folgenden Beyspielen deutlicher.

I. $\sqrt[3]{\quad}$ 6 | 8.5.9 (1 9 Wurzeltheile

a b

$a^3 = 1$

$3\,a^2 = 3 \mid 58$

$3\,a^2\,b = 27$

315

$3\,a\,b^2 = 243$

729

$b^3 = 729$

000

Probe.

19 } Wurzel
19

171
19

361 Quadrat
19 Wurzel

3249
361

6859 Würfel.

II. $\sqrt[3]{\quad}$ 59 | 3.1.9 (3 9 Wurzeltheile.

a b

$a^3 = 27$

$3\,a^2 = 27 \mid 323$

$3\,a^2b = 243$

801

$3\,a\,b^2 = 729$

729

$b^3 = 729$

000

Probe.

39
39
351
117
1521
39
13689
4563
59319

a b
III. $\sqrt[3]{}$ 79 | 5.0.7 (43

$a^3 = 64$

$3a^2 = 48$ | 155

$3a^2b = 144$

110

$3ab^2 = 108$

27

$b^3 = 27$

00

Probe.

43 } Wurzel
43 }
129
172
1849 Quadrat
43 Wurzel
5547
7396
79507 Würfel.

IV. $\sqrt[3]{941192}$ | 192 (98 — a b

$a^3 = 729$

$3\,a^2 = 243$ | 2121

$3\,a^2\,b = 1944$

1779

$3\,a\,b^2 = 1728$

512

b^3 512

000

Probe.

98 } Wurzel
98

784

882

9604 Quadrat

98 Wurzel

76832

86436

941192 Würfel.

V. $\sqrt[3]{874}$ | 329 (9 5 Wurzeltheile.

$a^3 = 729$

$3\,a^2 = 243$ | 1453

1215

$3\,a^2\,b = 2382$

$3\,a\,b^2 = 675$

17079

125

16954 Rest.

Probe.

95
95 } Wurzel
475
855
9025 Quadrat
95 Wurzel
45125
81225
857375 Würfel
16954 Rest
874329 gegeb. Zahl.

§. 2.

Theil, woraus der Würfel mehrzifferiger Wurzeln besteht

I. Wenn $p + q + r$ eine dreyzifferige Cubicwurzel bedeutet, so kann sie dadurch in eine zweytheilige verwandelt werden, daß man $p + q = a$ und $r = b$ setzt, wodurch $(p + q + r)^3 = (a + b)^3$ wird. Dieses gibt folgende Auseinandersetzung:

$$a^3 = (p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$
$$3a^2b = 3 \times (p + q)^2 r$$
$$3ab^2 = 3 \times (p + q) r^2$$
$$b^3 = r^3$$

II. Daher besteht der Würfel einer zweyzifferigen Wurzel aus folgenden sieben Stücken:

1) aus dem Würfel des ersten Theils,

2) aus dem dreyfachen Producte von dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten,

3) aus einem dreyfachen Producte von dem ersten Theile in das Quadrat des zweyten,

4) aus dem Würfel des zweyten Theils,

5) aus einem dreyfachen Producte von dem Quadrate der Summe des ersten und zweyten Theils in den dritten,

6) aus einem dreyfachen Producte von der Summe des ersten und zweyten Theils in das Quadrat des dritten, und

7) aus dem Würfel des dritten Theils.

III. Wenn man bey einer, in Ziffern gegebenen, dreytheiligen Cubicwurzel diese sieben Stücke gehörig bildet und zusammen addirt, so entsteht der Würfel der gegebenen Zahl; eine Rechnungsübung, welche den Anfängern dieser Lehre zu empfehlen ist.

IV. Um die Theile zu finden, woraus der Würfel der vierzifferigen Zahlen besteht, denke man sich unter $p + q + r + s$ diese viertheilige Wurzel, setze $p + q + r = a$ und $s = b$, so wird $(p + q + r + s)^3 = (a + b)^3$. Man erhält daher:

$$a^3 = (p + q + r)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + 3(p + q)^2 r + 3(p + q) r^2 + r^3$$

$$3a^2b = 3(p + q + r)^2 s$$

$$3ab^2 = 3(p + q + r) 5^2$$

$$b^3 = s^3$$

V. Wie jedes dieser zehn Stücke mit Worten benennt werden kann, ergibt sich aus dem Vorhergehenden und wird daher übergangen.

Bemerkenswerth aber ist es hierbey, daß für jeden neuen, zur Wurzel kommenden Theil der Würfel einen Zuwachs von 3 Stücken erhält, wovon das erste

immer ein dreyfaches Product von dem Quadrate aus der Summe aller vorhergegangenen Theile in den neuen; das zweyte ein dreyfaches Product von der Summe aller vorhergegangenen Wurzeltheile in das Quadrat des neuen, und das dritte der Würfel des neuen Theiles ist. Hierdurch ist es leicht, die Formel für alle mehrzifferigen Cubicwurzeln zu entwickeln. Es ist z. B. $(p+q+r+s+t)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + 3(p+q)^2 r + 3(p+q)r^2 + r^3 + 3(p+q+r)^2 s + 3(p+q+r)s^2 + s^3 + 3(p+q+r+s)^2 t + 3(p+q+r+s)t^2 + t^3$.

Zur Uebung in der Bedeutung dieser Formel, kann man den Würfel einer gegebenen fünfzifferigen Zahl leicht nach ihr berechnen.

§. 3.

Fernere Vodersätze zur Ausziehung mehrtheiliger Cubicwurzeln.

I. Nach diesen Vodersätzen ist es leicht nachzuweisen, daß alle Stücke, woraus die Würfel mehrzifferiger Wurzeln bestehen, in solchen Ordnungen mit ihren niedrigsten Ziffern anfangen, welche nach dem Gesetze: 1, 10, 100, 1000, 10000 u. s. f. aufsteigen.

Wäre $a + b + c$ die dreytheilige Wurzel, so ist a der Hundertter, b der Zehner und c der Einer. Daher ist a^3 zum wenigsten $= 1000000$, d. h. von der Ordnung der Millionen. Das folgende dreyfache Product oder $3a^2b$ enthält das Product aus dem Quadrate von a, d. h. von 10000 in b oder in 10, und muß daher von der nächst niedrigern Ordnung d. h. von den Hunderttausenden seyn. Das nächste

dreyfache Product, oder $3ab^2$ enthält das Product aus 100 in das Quadrat von 10, d. h. ein Product aus 100 in 100, welches von der Ordnung der Zehntausenden ist. Der Würfel von b ist der Würfel eines Zehners, und muß daher in den Tausenden anfangen. Das nächste Product, oder $3(a+b)^2 c$ enthält das Quadrat von a + b welches, da b ein Zehner ist, wenigstens in den Hunderttten liegen muß. Das nächste Product $3(a+b)c^2$ muß wenigstens von der Ordnung der Zehner seyn, da b selbst ein Zehner ist. Endlich muß c^3 in den Einern anfangen, da c ein Einer ist.

II. Auch kann man leicht berechnen, wie hoch jedes dieser einzelnen Stücke emporsteigt, und auf ähnliche Art nachweisen, daß das Gesetz von den unmittelbar auf einander folgenden Ordnungen auch von den Stücken des Würfels aller mehrzifferigen Wurzel gelte.

III. Ferner läßt sich leicht erkennen, daß jede gegebene Zahl eine so viel zifferige Cubicwurzel haben werde, als man aus ihr Classen erhält, wenn sie von der Rechten zur Linken auf bekannte Weise in dreyzifferige Abtheilungen zertheilt wird.

IV. Bestände die Zahl aus 7, 8 oder 9 Ziffern, so müßte sie eine dreytheilige Cubicwurzel haben, da sie weder zwey noch mehrtheilig seyn kann. Denn die größte zweyzifferige Zahl ist 99 und ihr Würfel = 971299 d. h. eine Zahl, welche nur 6 Ziffer hat. Sollte aber die Cubicwurzel der gegebenen Zahl vier Ziffer haben, so wäre sie wenigstens = 1000. Da nun der Würfel von 1000 = 1000000000 d. h. eine

Zahl von 10 Ziffern ist, so ist derselbe schon größer, als die größte neunzifferige Zahl.

V. Auf gleiche Weise muß jede Zahl von 10, 11 oder 12 Ziffern eine viertheilige Cubicwurzel haben, da letztere weder aus drey, noch aus fünf Ziffern bestehen kann. Denn die größte dreyzifferige Zahl ist 999 und ihr Würfel = 997002999, d. h. eine Zahl von neun Ziffern, welche immer kleiner, als die gegebene von 10, 11 oder 12 Ziffern ist. Hätte aber die zu findende Cubicwurzel 5 Ziffer so wäre sie wenigstens = 10000 und ihr Würfel = 1000000000000, d. h. eine Zahl von 13 Ziffern, welche größer, als die größte zwölfzifferige ist.

§. 4.

Bestimmung der Wurzeltheile aus vielzifferigen Cubiczahlen.

I. Um die Cubicwurzeln aus allen gegebenen ganzen Zahlen zu finden, verfahre man ganz auf ähnliche Weise, wie dieses oben bey der Ausziehung der zweytheiligen Cubicwurzeln geschehen ist. Wollte man diese Regeln mit Worten angeben, so müßte nicht nur alles wiederholt werden, was früher gesagt worden ist, sondern diese Vorschriften würden sich noch bedeutend vermehren. Da das wirkliche Verfahren durch Beyspiele weit anschaulicher wird, so sollen nun mehrere aufgelöst werden.

II. Berechnung wirklicher Beyspiele.

a b c

I. $\sqrt[3]{41 \mid 7.8.1. \mid 9.2.3.}$ (3 4 7

$a^3 = 27$

$3a^2 = 27 \mid 147$

$3a^2b = 108$

398

$3ab^2 = 144$

2541

$b^3 = 64$

$3\,(a + b)^2 = 3468 \mid 24779$

$3\,(a + b)^2\,c = 24276$

5032

$3\,(a + b)\,c^2 = 4998$

343

$c^3 = 343$

000

Probe.

347 } Wurzel.
347

2429

1388

1041

120409 Quadrat.

347 Wurzel.

842863

481636

361227

41781923 Würfel

a b c

II. $\sqrt[3]{}$ 145 | 531 | 589 (5 2 6

$a^3 = 125$

$3a^2 = 75 \mid 205$

$3a^2b = 150$

553

$3ab^2 = 60$

4931

$b^3 = 8$

$3(a+b)^2 = 8112 \mid 49235$

$3(a+b)^2 c = 48672$

5638

$3(a+b)c^2 = 5616$

229

$c^3 = 216$

13 Rest.

Probe.

526 } Wurzel
526

3156

1052

2630

276676 Quadrat

526 Wurzel

1660056

553352

1383380

145531576 Würfel

13 Rest

145531589 gegeb. Zahl.

a b c d

III. $\sqrt[3]{}$ 148 | 119 | 857 | 171 (5 2 9 1

$a^3 = 125$

$3a^2 = 75 \mid 231$

$3a^2b = 150$

811

$3ab^2 = 161$

7079

$b^3 = 8$

$3\,(a+b)^2 = 8112 \mid 75118$

$3\,(a+b)^2\,c = 73008$

21105

$3\,(a+b)\,c^2 = 12636$

84697

$c^3 = 729$

$3(a+b+c)^2 = 839523 \mid 839681$

$3\,(a+b+c)^2\,d = 839523$

1587

$3\,(a+b+c)\,d^2 = 1587$

1

$d^3 = 1$

0

a b c d e

IV. $\sqrt[3]{}$ 5 | 389 | 983 | 870 | 081 (17533

$a^3 = 1$

$3a^2 = 3 \mid 43$

$3a^2b = 21$

228

$3ab^2 = 147$

819

$b^3 = 343$

$3(a+b)^2 = 867 \mid 4769$

$3(a+b)^2 c = 4335$

4348

$3(a+b)c^2 = 1275$

30733

$c^3 = 125$

$3(a+b+c)^2 = 91875 \mid 306088$

$3(a+b+c)^2 d = 275625$

304637

$3(a+b+c)d^2 = 4725$

2999120

$c^3 = 27$

$3(a+b+c+d)^2 = 9219027 \mid 29990930$

$3(a+b+c+d)^2 e = 27657081$

23338498

$3(a+b+c+d)e^2 = 47381$

232911671

$e^3 = 27$

232911644 Rest.

Probe.

Hier muß, nach geführter Rechnung, $(17533)^3 + 232911644 = 5389983870081$ seyn, wie man sich leicht überzeugen kann.

§. 5.

Uebungs-Fragen.

I. Wie findet man die Cubicwurzel aus 4, 5 und 6 zifferigen Zahlen? Beyspiele zur Erläuterung? Was ist $\sqrt[3]{6859}$, $\sqrt[3]{91125}$, $\sqrt[3]{287496}$, $\sqrt[3]{857375}$? $\sqrt[3]{493039}$? $\sqrt[3]{328509}$? Wie macht man die Probe? (§. 1.)

II. Aus welchen Stücken besteht der Würfel einer 3, 4 und 5 zifferigen Wurzel? Wie kann man die Würfel solcher Zahlen nach dieser Formel bilden? Wie heißt das allgemeine Gesetz für diese Stücke der Würfel vielzifferiger Wurzeln. (§. 2.)

III. In welchen Ordnungen liegen diese auf einanderfolgenden Stücke mit ihren niedrigsten Ziffern? Wie bestimmt man die Zahl der Wurzeltheile bey vielzifferigen Cubiczahlen? Grund dieser Bestimmung? (§. 3.)

IV. Wie findet man die Cubicwurzel aus jeder gegebenen mehrzifferigen Zahl? Wie macht man die Probe darüber? Was ist $\sqrt[3]{1953125}$, $\sqrt[3]{5088448}$, $\sqrt[3]{14348907}$; $\sqrt[3]{143055667}$; $\sqrt[3]{838561807}$ $\sqrt[3]{825294798}$? (§. 4.)

III. Lehrübung.

Ausziehung der Cubicwurzeln durch Annäherung.

§. 1.

Irrationalzahlen durch Ausziehung der Cubicwurzeln.

1. Wenn man sich die ersten fünf ganzen Zahlen und ihre Würfel denkt, nämlich:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729,

und zwischen zwey aufeinanderfolgenden Würfeln, z. B. zwischen 27 und 64, die Zahl 58 wählt, und die Frage stellt: Was ist $\sqrt[3]{58}$? so ist klar, daß diese größer als 3 und kleiner als 4 seyn muß. Wäre sie ganz genau anzugeben, so müßte sie 3 Ganze nebst einem ächten Bruche seyn, wofür man $3 + \frac{n}{m}$ setzen kann. Wäre nun dieses die genaue Cubicwurzel von 58, so müßte $\left(3 + \frac{n}{m}\right)^3 = 58$ seyn. Wird nun jene zweytheilige Wurzel zum Würfel erhoben, so erhält man als dessen viertes Stück den Würfel von $\frac{n}{m}$. Da aber dieser Bruch ein ächter ist, so muß auch sein Würfel nicht nur ein ächter, sondern selbst ein noch kleinerer Bruch, als $\frac{n}{m}$ seyn. Folglich wird die zweytheilige Wurzel $3 + \frac{n}{m}$, zum Würfel erhoben, nie

eine reine ganze Zahl hervorbringen, somit auch nie die Zahl 58 genau bilden können. Daher ist $\sqrt[3]{58}$ eine Zahl, welche weder durch Ganze, noch durch Bruchtheile je mit voller Genauigkeit bestimmt werden kann, d. h. $\sqrt[3]{58}$ ist eine Irrationalzahl.

II. Da unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 729 sich nur 9 vollkommene Würfel befinden, so sieht man, daß unter den ersten 729 Zahlen die große Menge von 720 unvollkommenen Würfelzahlen befinden muß. Es gibt daher durch Ausziehung der Cubicwurzel verhältnißmäßig eine weit größere Menge von Irrationalzahlen, als durch Ausziehung der Quadratzahlen, und dieses führt wieder zur Frage, wie man in solchen Fällen die Cubicwurzel durch Annäherung finden kann.

§. 2.

Die Cubicwurzeln unvollständiger Würfel durch Annäherung zu finden.

I. Vorerst bemerke man, was aus dem vorhergehenden schon erhellet, daß die Cubicwurzel aus gemeinen Brüchen gefunden wird, wenn man dieselbe sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner zieht.

So ist z. B. $\sqrt[3]{\frac{64}{729}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{8}{9}$; ferner

$\sqrt[3]{\frac{1000}{1728}} = \frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{1728}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$; ferner $\sqrt[3]{\frac{136}{379}} = \frac{\sqrt[3]{136}}{\sqrt[3]{379}}$, wo sowohl der Zähler, als der Nenner eine irrationale Zahl ist.

II. Sollte man nun z. B. $\sqrt[3]{19}$ finden, so ist

$$\sqrt[3]{19} = \sqrt[3]{\frac{19000}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{19000}}{10}.$$

Da nun $\sqrt[3]{19000}$ eine zweyzifferige Zahl gibt, so muß diese noch mit 10 dividirt werden, wodurch man die Cubicwurzel von 18 in Ganzen und in Zehntel erhält.

Setzte man $\sqrt[3]{19} = \sqrt[3]{\frac{19000000}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{19000000}}{100}$

so würde die Cubicwurzel von 19000000 eine dreyzifferige Zahl seyn, welche durch 100 dividirt, nicht blos Ganze, sondern Zehntel und Hunderttel gäbe.

Nähme man $\sqrt[3]{19} = \sqrt[3]{\frac{19000000000}{1000000000}} = \frac{\sqrt[3]{19000000000}}{1000}$ und bestimmte aus 19000000000 die Cubicwurzel, so fände man eine vierzifferige Zahl, welche, mit 1000 dividirt, nebst den Ganzen noch Zehntel, Hunderttel und Tausendtel gäbe.

III. Daher entsteht die Regel: Um aus einer unvollständigen Cubiczahl die Cubicwurzel durch Annäherung zu finden, hänge man so vielmal 3 Nullen zur Rechten der Zahl an, als auf wie viele Decimalbruchstellen die Cubicwurzel gefunden werden soll.

IV. Nachstehende Beyspiele erläutern dieses:

$$\begin{array}{rl} & \text{a b c d} \\ 1.\ \sqrt[3]{19\,|\,000\,|\,000\,|\,000} & (2,668\ldots \\ a^3 = & 8 \\ \hline 3a^2 = & 12\ |\ 110 \\ 3a^2b = & 72 \\ \hline & 380 \\ 3ab^2 = & 216 \\ \hline & 1640 \\ b^3 = & 216 \\ \hline 3(a+b)^2 = & 2028\ |\ 14240 \\ 3(a+b)^2c = & 12168 \\ \hline & 20720 \\ 3(a+b)c^2 = & 2808 \\ \hline & 179120 \\ c^3 = & 216 \\ \hline & 1789040 \\ 3(a+b+c)^2 = & (212268) \\ 3(a+b+c)^2d = & 1698144 \\ \hline & 908960 \\ 3(a+b+c)d^2 = & 153216 \\ \hline & 7557440 \\ d^3 = & 512 \\ \hline & 7557928\ \text{Rest.} \end{array}$$

Hier muß $(2{,}668)^3 + 7557928 = 19$ seyn, wie die wirkliche Rechnung lehrt. Die folgenden Ziffer der Wurzel sind 4016 ...; so, daß $\sqrt[3]{19} = 2{,}6684016\ldots$ wird.

II. $\sqrt[3]{39|000|000|000|000}$ (3,3912...

a b c d e

$a^3 = 27$

$3a^2 = 26 \mid 120$

$3a^2b = 81$

390

$3ab^2 = 81$

3090

$b^3 = 27$

$3(a+b)^2 = 3267 \mid 30630$

$3(a+b)^2 c = 29402$

12270

$3(a+b)c^2 = 8019$

42510

$c^3 = 729$

$3(a+b+c)^2 = 344763 \mid 417810$

$3(a+b+c)^2 d = 344763$

730470

$3(a+b+c)d^2 = 1017$

7294530

$d^3 = 1$

$3(a+b+c+d)^2 = 34496643 \mid 72945290$

$3(a+b+c+d)^2 e = 68993286$

39520040

$3(a+b+c+d)e^2 = 40692$

394793480

$e^3 = 8$

394793472 Rest.

Die wirkliche Proberechnung lehrt, daß $(3,3912)^3 + 394793472 = 39$ ist. Noch genauer findet man $\sqrt[3]{39} = 3,3912144....$

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Wie entstehen Irrationalzahlen durch Ausziehen der Cubicwurzel? Warum gibt es in der Reihe der natürlichen Zahlen mehr unvollständige, als vollständige Würfel? (§. 1.)

II. Wie findet man die Cubicwurzel durch Annäherung? Wie viele Nullen werden der gegebenen Zahl angehängt? Wann schließt man in diesem Falle die Rechnung? Wie wird die Probe hierüber gemacht? (§. 2.) Was ist $\sqrt[3]{8743}$; $\sqrt[3]{548}$; $\sqrt[3]{76}$; $\sqrt[3]{10}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[3]{100}$?

IV. Lehrübung.

Cubicwurzeln aus gemeinen und aus Decimalbrüchen.

§. 1.

Die Cubicwurzeln gemeiner Brüche zu finden.

I. Die allgemeine Regel ist hier, wie schon oben bemerkt wurde, diese: Man ziehe sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner die Cubicwurzel, was meistens durch Annäherung geschehen muß. So ist

z. B. $\sqrt[3]{\frac{11}{20}} = \frac{\sqrt[3]{11}}{\sqrt[3]{20}} = \frac{2{,}2239801}{2{,}7144177}$;

$\sqrt[3]{\frac{51}{60}} = \frac{3{,}7084298\ldots}{3{,}9148676\ldots}$

$\sqrt[3]{\frac{146}{121}} = \frac{4{,}8769989\ldots}{4{,}9460874\ldots}$

$$\sqrt[3]{\frac{156}{165}} = \frac{5,3832126\ldots}{5,4848065\ldots}$$

$$\sqrt[3]{\frac{331}{350}} = \frac{6,9173964\ldots}{7,0472980\ldots}$$

$$\sqrt[3]{\frac{466}{487}} = \frac{7,7528695\ldots}{7,8676130\ldots}$$

II. Da das Ausziehen der Cubicwurzeln aus Irrationalzahlen auf viele Decimalstellen eine beschwerliche Rechnung ist, so kann man sich dieselbe bey dem Ausziehen der Cubicwurzeln aus gemeinen Brüchen dadurch erleichtern, daß Zähler und Nenner des Bruchs mit dem Quadrate des Nenners multiplicirt wird, wodurch man den Nenner jedesmal in einen vollkommenen Würfel verwandelt, dessen Cubicwurzel bekannt

ist, z. B. $\sqrt[3]{\frac{7}{11}} = \frac{\sqrt[3]{7\times11\times11}}{\sqrt[3]{11\times11\times11}} = \frac{\sqrt[3]{847}}{11} = \frac{9,4615249}{11}$;

ferner $\sqrt[3]{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt[3]{3\times49}}{\sqrt[3]{7\times49}} = \frac{\sqrt[3]{147}}{7} = \frac{5,2776321}{7}$;

$$\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt[3]{3\times25}}{\sqrt[3]{5\times25}} = \frac{\sqrt[3]{75}}{5} = \frac{4,2171633}{5}.$$

§. 2.

Aus Decimalbrüchen die Cubicwurzeln zu finden.

I. Um aus gegebenen Decimalbrüchen die Cubicwurzeln zu finden, sehe man vor Allem, ob die Zahl der Decimalbruchstellen ein Mehrfaches von 3 ist oder

nicht, in welchem letztern Falle eine oder 2 Nullen zur Rechten angehängt werden müssen. Der Grund liegt darin, weil sich nur in der Ordnung der Tausendtel, der Milliontel, der Tausendmilliontel u. s. w. vollständige Würfelzahlen finden. Nachdem man sodann die Classeneintheilung wie gewöhnlich gemacht hat, so nimmt auch die Rechnung selbst den ganz gewöhnlichen Gang, wie man aus folgenden Beyspielen näher ersehen kann.

II. Erläuterung durch Beyspiele.

1) $\sqrt[3]{0,345} = \sqrt[3]{\frac{345}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{345}}{10}$

$= \frac{7,0135791}{10} = 0,70135791 \ldots$

2) $\sqrt[3]{0,525} = \sqrt[3]{\frac{525}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{525}}{10}$

$= \frac{8,0671432}{10} = 0,80671432 \ldots$

3) $\sqrt[3]{0,71} = \sqrt[3]{\frac{710}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{710}}{10}$

$= \frac{8,9211214}{10} = 0,89211214 \ldots$

4) $\sqrt[3]{0,5} = \sqrt[3]{\frac{500}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{500}}{10}$

$= \frac{7,9370058}{10} = 0,79370058$

5) $\sqrt[3]{8,34} = \sqrt[3]{\frac{8340}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{8340}}{10}$

6) $\sqrt[3]{74{,}0314} = \sqrt[3]{\frac{74031400}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{74031400}}{100}$

7) $\sqrt[3]{982{,}7} = \sqrt[3]{\frac{982700}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{982700}}{10}$

8) $\sqrt[3]{8325{,}0005} = \sqrt[3]{\frac{8335000500}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{8325000500}}{100}$

u. s. w.

§. 3.

Einige Anwendungen dieser Lehre von der Ausziehung der Cubicwurzeln. Höhere Wurzeln. Bruchexponenten.

I. Es ist bereits im Anfange dieses Lehrganges bemerkt worden, daß man den körperlichen Inhalt eines Würfels findet, wenn man das Maas von dessen Seite zweymal mit sich selbst multiplicirt. Wäre diese Seite z. B. 3 Fuß, so würde der Inhalt des Würfels $= 3 \times 3 \times 3 = 27$ Cubicfuße seyn. Wenn nun dieser Würfel fünfmal vergrößert werden sollte, so entstände die Frage, wie groß nun seine Seite wäre. Da der neue Würfel einen Inhalt $= 27 \times 5 = 135$ hat, so wird $\sqrt[3]{135}$ die Seite desselben bestimmen. Da nun $\sqrt[3]{135} = 5{,}1299275\ldots$ ist, so würde die Seite des fünffach größern Würfels 5 Fuß 1 Zoll 2 Linien 9 Puncte u. s. f. betragen.

II. Auf ähnliche Weise läßt sich folgende Frage beantworten. Der Inhalt eines Würfels ist 64 Cubicfuß. Wie groß wird die Seite eines andern Würfels seyn, dessen Inhalt $\frac{5}{7}$ von jenem des gegebenen ist?

Antw. $\sqrt[3]{\frac{5}{7} \times 64}$.

III. Es sind drey Würfel gegeben, wovon der erste = 8, der zweyte = 27 und der dritte = 64 Cubicfuße ist. Wie groß wird die Seite eines Würfels seyn, welcher diesen dreyen zusammengenommen gleich ist? Da 8 + 27 + 64 = 99 ist, so wird die Seite des zufindenden Würfels $= \sqrt[3]{99} = 4{,}6260650$ d. h. 4 Fuß, 6 Zolle, 2 Linien, 6 Puncte u. s. f. betragen.

IV. Auf ähnliche Weise, wie bisher das Ausziehen der Quadrat- und Cubicwurzel gelehrt worden ist, könnte man auch von dem Ausziehen der Wurzel der 4ten, 5ten, 6ten, 7ten u. s. f. Potenz sprechen, wozu die zweytheilige Wurzel a + b auf diese höheren Potenzen müßte erhoben werden, um die Bestandtheile dieser Potenzen zu finden. Die Rechnung aber wird immer beschwerlicher. Eine sehr bequeme Methode, sie zu führen, kömmt in dem Lehrgange von der Logarithenen vor. Hier kann man folgende höhere Potenzen von a + b bemerken:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$
$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$
$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$
$$(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3$$

$$+ 126a^5b^4 + 126a^4b^6 + 84a^3b^6$$
$$+ 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$$
$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3$$
$$+ 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6$$
$$+ 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9$$
$$+ b^{10}.$$

V. Noch verdient hier die Bedeutung der Bruchexponenten erklärt zu werden. Um z. B. den Sinn von $a^{\frac{1}{2}}$ zu erkennen, denke man sich das Product $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}$, welches offenbar $= a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a$ ist. Da nun auch $\sqrt{a} + \sqrt{a} = a$ ist, so muß $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ seyn. Daher $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$ u. s. w. — Da $a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}} = a$ und $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}$ ebenfalls $= a$ ist, so muß auch $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ seyn. — Im Allgemeinen ist daher $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. — Was ist nun z. B. $a^{\frac{2}{3}}$? Da $a^{\frac{2}{3}} = (a^{\frac{1}{3}})^2$ und $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ ist, so muß $(a^{\frac{1}{3}})^2 = \sqrt[3]{a^2}$ seyn und es ist daher auch $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$.

Allgemein ausgedrückt, heißt dieses $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$, welches folgende Regel gibt: Wenn Größen Bruchexponenten haben, so bedeutet der Nenner desselben den Grad der auszuziehenden Wurzel, und ihr Zähler bleibt als Exponent bey dieser Größe.

Da, nach dem Vorhergehenden, $a^{-n} = a^{\frac{1}{n}}$ ist, so wird nun auch $a^{\frac{-n}{m}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}}$. — In Zahlen wer-

den solche Ausdrücke am bequemsten durch Logarithmen berechnet.

Dreyzehnter Lehrgang.

Grundlehren von den Progressionen.

I. Lehrübung.

Grundbegriffe und Vordersätze von den Progressionen überhaupt.

§. 1.

Nöthige Erklärungen.

I. Unter einer Progression versteht man eine Reihe von aufeinander folgenden Zahlen, welche nach einem bestimmten Gesetze größer oder kleiner werden z. B.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 . . . .

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 . . . .

30, 26, 22, 18, 14, 10, 6, 2 . . . .

21, 18, 15, 12, 9, 6, 3 . . . .

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 . . . .

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 . . . .

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128} \ldots .$

II. Aus der Betrachtung dieser Reihen geht sogleich hervor, daß in ihnen entweder das Gesetz des arithmetischen oder das Gesetz des geometrischen Verhältnisses herrschet. Es stellen z. B. die ersten vier Reihen ein Fortschreiten nach arithmetischem Verhältnisse; die drey letzten aber ein solches Fortschreiten in geometrischem Verhältnisse dar.

III. Daher werden die Progressionen in arithmetische und in geometrische eingetheilt. Bey jenen besteht unter den unmittelbar aufeinanderfolgenden zwey Gliedern immer die nämliche Differenz; bey dieser aber immer derselbige Quotient.

IV. Sowohl die arithmetischen, als die geometrischen Progressionen sind entweder steigende, wenn die folgenden Glieder immer größer, oder fallende, wenn die nachfolgenden Glieder immer kleiner werden. Hieraus ist klar, daß jede steigende Progression, rückwärts gelesen eine fallende; jede fallende aber, rückwärts betrachtet eine steigende sey.

V. Ferner folgt, daß jede drey unmittelbar auf einander folgende Glieder einer Progression immer eine stetige Proportion bilden, man mag sie aus derselben nehmen, wo man will. So ist z. B. in der ersten der obigen Progressionen $5 - 7 = 7 - 9$; oder $9 - 11 = 11 - 13$. Aus der dritten wird z. B. $26 - 22 = 22 - 18$; $22 - 18 = 18 - 14$. Die fünfte gibt z. B. $2 : 4 = 4 : 8$; $4 : 8 = 8 : 16$ und aus der sechsten wird z. B. $3 : 9 = 9 : 27$; $9 : 27 = 27 : 81$ u. s. w.

§. 2.

Allgemeine Darstellung der Progressionen

I. Um die Progressionen allgemein darzustellen, bedient man sich am bequemsten der Buchstaben. Nennt man z. B. das erste Glied einer arithmetischen Progression a, den Unterschied jedes Gliederpaares d und nimmt an, daß die Reihe eine steigende sey, so ist ihr allgemeiner Ausdruck dieser:

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d \ldots$

II. Sollte aber die Progression eine fallende seyn, so würde sie folgendermaßen dargestellt:

a, a—d, a—2d, a—3d, a—4d, a—5d, a—6d....

Da die Zahl a immer die nämliche bleibt; die Differenzen aber nach dem Mehrfachen der natürlichen Zahlen wachsen, so muß es einmal ein vielfaches von d geben, welches größer als a ist, und in diesem Falle kommen negative Glieder in die Progression z. B.

11, 8, 5, 2, — 1, — 4, — 7, — 10, — 13, — 16...

III. Wenn das erste Glied einer geometrischen Progression = a und der in ihr herrschende Exponent = e ist, so stellt Folgendes die steigende geometrische Reihe im Allgemeinen dar:

$$a, ae, ae^2, ae^3, ae^4, ae^5, ae^6, \ldots\ldots ae^n$$

IV. Wäre aber der Exponent dieser Reihe ein Bruch und z. B. $= \frac{1}{e}$, so würde die fallende Reihe diese:

$$a, \frac{a}{e}, \frac{a}{e^2}, \frac{a}{e^3}, \frac{a}{e^4}, \frac{a}{e^5}, \frac{a}{e^6} \ldots \frac{a}{e^n} \ldots$$

Wenn nun eine Potenz von e einmal größer als a ist, so werden die Glieder dieser Progression zu ächten Brüchen, wovon man sich durch Zahlenbeyspiele leicht überzeugen kann.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Was versteht man unter einer Progression überhaupt? Was ist eine arithmetische, was eine geometrische Progression? Was sind steigende und fallende

Progressionen? Wie kann man aus Progressionen stetige Proportionen bilden? (§. 1.)

II. Wie lassen sich die arithmetischen Progressionen allgemein darstellen? Wodurch entstehen negative Glieder in denselben? Beyspiele? Wie werden geometrische Progressionen allgemein dargestellt? Wodurch entstehen Bruchglieder in denselben? (§. 2.).

II. Lehrübung.

Elementarlehren von der arithmetischen Progression.

§. 1.

Entwickelung der Formel: $u = a + (n - 1) d$ und Folgerungen hieraus.

I. Bey jeder arithmetischen Progression kann vorzüglich fünferley betrachtet werden: Das erste Glied, welches man a, die Differenz, welche man d, die Zahl der Glieder, welche man n, das letzte Glied, welches man u und die Summe aller Progressionsglieder, welche man s nennt.

II. Vor allem ergibt sich aus dem Bisherigen, daß jedes Glied einer geometrischen Progression seiner Größe nach bestimmt sey, sobald man das erste Glied, und die Differenz bestimmt hat. Denn jedes folgende Glied besteht aus dem ersten Gliede nebst einem Mehrfachen dieser Differenz. Wäre z. B. das erste Glied $= 5$ und die Differenz $= 4$, so kann man sich jedes folgende durch die Summe $5 + (n \times 4)$ vorstellen, wo n irgend eine ganze Zahl bedeutet.

III. Betrachtet man aber die arithmetische Progression noch genauer, so ergibt sich, daß in dem zweyten Gliede die Differenz einmal, in dem dritten Gliede die Differenz zweymal, in dem vierten Gliede die Differenz dreymal und in dem nten Gliede diese Differenz $n-1$ mal vorkömmt. Daher kann man die Größe jedes Gliedes dieser Reihe leicht bestimmen, sobald man nur, ausser dem ersten Gliede und der Differenz, die Zahl dieses Gliedes kennt. Wäre z. B. das erste Glied $= 5$, die Differenz $= 4$, so würde in dem 21ten Gliede diese Differenz 20mal vorkommen und dieses Glied müßte $= 5 + (21 - 1) \times 4 = 5 + 20 \times 4 = 5 + 80 = 85$ seyn. Setzt man das nte Glied $= u$, so hat man die Formel $u = a + (n - 1) \times d$.

IV. Wie groß würde das hunderte Glied in einer Reihe, worin das erste Glied $= 3$, und die Differenz $= 4$ wäre?

Hier wäre $u = 3 + (100 - 1) \times 4 = 3 + 99 \times 4 = 3 + 396 = 399$.

V. Soll man in der Formel $u = a + (n - 1) \times d$ den Werth der Differenz, oder die Größe von d finso nehme man beyderseits die Größe a hinweg, wodurch $u - a = (n - 1) \times d$ wird, da Gleiches von Gleichem weggenommen, auch Gleiches als Reste übrig läßt. Wird nunmehr beyderseits mit $n - 1$ dividirt, so erhält man, da Gleiches durch Gleiches dividirt, gleiche Quotienten gibt, $d = \frac{u - a}{n - 1}$, welches die allgemeine Regel gibt: Man findet die Differenz der arithmetischen Progression,

wenn vom letzten Gliede das erste abgezogen und dieser Unterschied durch die um 1 verminderte Gliederzahl dividirt wird.

Wie groß ist z. B. die Differenz einer Progression, worin das letzte Glied $= 30$, das erste $= 2$ und die Zahl der Glieder $= 8$ ist? hier wird $d = \frac{30 - 2}{8 - 1}$

$= \frac{28}{7} = 4$, und die Progression ist diese:

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30.

VI. Um aber aus der vorigen Formel $u = a + (n - 1)\,d$ den Werth von n zu finden, dividire man zuerst auf beyden Seiten mit d, so wird $\frac{u}{d} = \frac{a}{d} + n - 1$. Wird nun der Bruch $\frac{a}{d}$ beyderseits weggenommen so erhält man $\frac{u}{d} - \frac{a}{d} = n - 1$ oder $\frac{u - a}{d} = n - 1$. Wird nun beyderseits $+ 1$ addirt, so ist $n = \frac{u - a}{d} + 1$. Daher die Regel: Wenn man vom letzten Gliede das erste subtrahirt, die Differenz durch den Unterschied der Progression dividirt und zum erhaltenen Quotienten 1 addirt, so erhält man die Zahl aller Glieder.

Wie groß ist die Gliederzahl einer Progression, worin das letzte Glied $= 21$, das erste $= 3$ und die Differenz auch $= 3$ ist? Hier wird $n = \frac{21 - 3}{3} + 1$

$= \frac{18}{3} + 1 = 6 + 1 = 6 + 1 = 7$ d. h. die Progression besteht aus sieben Gliedern und ist folgende:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21.

VII. Auch kann man aus der bekannten Formel $u = a + (n - 1)d$ den Werth von a ableiten. Wird nämlich beyderseits $(n - 1) \times d$ abgezogen, so entsteht $a = u - (n - 1)d$. Dies gibt die Vorschrift: Wenn man die Differenz mit der, um 1 verminderten Gliederzahl multiplicirt und dieses Product vom letzten Gliede subtrahirt, so erhält man das erste Glied.

Wie groß ist z. B. das erste Glied einer Progression, in welcher das letzte $= 13$, die Differenz $= 2$ und die Gliederzahl $= 7$ ist? Hier wird $u = 13 - (7 - 1) \times 2 = 13 - 6 \times 2 = 13 - 12 = 1$ und die Progression ist folgende:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.

§. 2.

Entwicklung der Formel $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, und Folgerungen daraus.

I. Wenn man eine steigende arithmetische Progression in der Aufeinanderfolge ihrer Glieder betrachtet, so ergibt sich, daß jedes Glied das erste enthält; daß aber jedes der folgenden Glieder eine Differenz mehr, als das unmittelbar vorhergehende hat. Bildet man daher eine Summe aus dem ersten und letzten Gliede, und dann aus dem zweyten und vorletzten, so müssen diese Summen einander gleich seyn. Denn jede ent-

hält das erste Glied doppelt, und so wie das zweyte Glied eine Differenz mehr, als das erste hat, so enthält das vorletzte wiederum eine Differenz weniger als das letzte, wodurch auch diese Differenzen in beyden Summen gleich vielmal vorkommen.

II. Dieses alles wird durch die allgemeine Darstellung der arithmetischen Reihen klar. Es ist z. B. in der Progression: a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, $a+5d$ die Summe vom ersten und letzten Gliede $= a + (a+5d) = 2a+5d$; die Summe vom zweyten und vorletzten $= (a+d)+(a+4d) = 2a+5d$, und vom dritten und vorvorletzten $= (a+2d)+(a+3d) = 2a+5d$.

III. Wenn die Zahl der Progressionsglieder eine ungerade ist, so muß die Summe vom ersten und letzten Gliede dem doppelten mittlern gleich seyn, z. B. in a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, $a+5d$, $a+6d$ ist die Summe vom ersten und letzten Gliede $= 2a+6d$ und das mittlere Glied $(a+3d)$ doppelt genommen, gibt ebenfalls $2a+6d$.

IV. Wenn daher die Gliederzahl eine gerade ist, wodurch alle Glieder paarweise vorkommen, so gibt es halb so viele Paare, als wie viele Glieder es sind. Wäre a das erste, u das letzte Glied und n die Zahl aller Glieder, so hätte man $\frac{n}{2}$ solcher Paare, deren jedes $= a + u$ ist. Daher wäre die Summe aller Glieder der Progression oder $s = (a+u) \times \frac{n}{2}$.

V. Wäre aber die Gliederzahl oder n ungerad, so hätte man offenbar $\frac{n-1}{2}$ solcher Paare, deren jedes

$= a + u$ ist, und die Summe aller Glieder weniger dem mittlern wäre $= (a + u) + \left(\frac{n-1}{2}\right)$. Da nun dieses mittelste Glied $= \frac{a+u}{2}$ ist, so muß die Summe aller Glieder $= (a + u) \times \left(\frac{n-1}{2}\right) + \left(\frac{a+u}{2}\right) =$

$(a + u)\frac{n}{2} - \frac{a+u}{2} + \frac{a+u}{2} = (a + u)\frac{n}{2}$ seyn, wie vorhin. Daher wird die Summe aller Glieder in jedem Falle gefunden, wenn man das erste Glied zum letzten addirt und die Summe mit der halben Gliederzahl multiplicirt. Es sey die Reihe:

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, so ist

$s = (3 + 23) \times \frac{11}{2} = 26 \times \frac{11}{2} = 13 \times 11 = 143$,

wie auch die wirkliche Summirung aller Glieder lehrt.

VI. Aus der so eben gefundenen Formel lassen sich noch drey andere für die Werthe von a, u, und n ableiten.

Wenn nämlich in dieser Formel $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$ auf beyden Seiten mit $\frac{n}{2}$ dividirt wird, so erhält man $\frac{2s}{n} = a + u$ und es wird, wenn man beyderseits u abzieht; $a = \frac{2s}{n} - u$. Hieraus entsteht die Regel:

Wenn man die doppelte Summe aller Glieder durch die Gliederzahl dividirt und vom

Quotienten das letzte Glied subtrahirt, so erhält man das erste Glied der Progression.

Wenn die Summe einer Progression = 116, das letzte Glied = 25, und die Gliederzahl = 8 ist, wie groß wird das erste Glied seyn? Hier ist a =

$$\frac{2 \times 116}{8} - 25 = \frac{232}{8} - 25 = 29 - 25 = 4,$$

Daher ist das erste Glied = 4 und die Progression diese:

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25.

VII. Soll man den Werth von u bestimmen, so darf man in dem kurz zuvor erhaltenen Ausdrucke $\frac{2s}{n} = a + u$ nur auf beyden Seiten die Größe a subtrahiren, wodurch $u = \frac{2s}{n} - a$ wird. Dieses gibt die Regel: Man findet das letzte Glied einer arithmetischen Progression, wenn die doppelte Summe aller Glieder durch die Gliederzahl dividirt und von dem Quotienten das erste Glied abgezogen wird.

Wie groß ist z. B. das letzte Glied einer Progression, deren Glieder-Summe = 116, deren erstes Glied = 4, und deren Gliederzahl = 8 ist? Hier wird $u = \frac{2 \times 116}{8} - 4 = \frac{232}{8} - 4 = 29 - 4 = 25$. Daher ist 25 das letzte Glied, wie die vorige Progression es auch lehret.

VIII. Zur Bestimmung des Werthes von n, dividirt man in der Formel $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$ auf

beyden Seiten mit $(a + u)$, so wird $\frac{s}{a+u} = \frac{n}{2}$, und wenn man nun beyderseits mit 2 multiplicirt, so ist $n = \frac{2s}{a+u}$.

Daher die Regel: Wenn man die doppelte Summe aller Progressionsglieder durch die Summe vom ersten und letzten Gliede dividirt, so ist der Quotient die Zahl der Glieder.

Wie viele Glieder hat eine Progression, deren Gliedersumme $= 148$, deren erstes Glied $= 1$ und deren letztes Glied $= 36$ ist? Hier wird $n = \frac{2 \times 148}{1 + 36} = \frac{296}{37} = 8$ und die Progression ist folgende:

1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36.

§. 3.

Anwendungen dieser Formel auf mancherley Aufgaben.

I. Wie groß ist die Summe aller aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen: $1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots n$?

Offenbar muß hier die Gliedersumme einer arithmetischen Progression gefunden werden, deren erstes Glied $= 1$, deren letztes Glied $= n$ und deren Gliederzahl ebenfalls $= n$ ist. Daher wird die Formel $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$ hier in diese verwandelt $s = (1 + n) \times \frac{n}{2} = \frac{n + n^2}{2}$. Daher entsteht die allgemeine Regel: Um die Summe von einer ge-

wissen Menge der gewöhnlichen, von 1 anfangenden Zahlen bis auf eine bestimmt angegebene Zahl zu finden, addire man das Quadrat dieser Zahl zu sich selbst, und halbire die Summe, so ist die Hälfte die verlangte Gliedersumme. So ist z. B. die Summe der ersten 30 ganzen Zahlen $= \frac{30^2 + 30}{2}$

$= \frac{900 + 30}{2} = \frac{930}{2} = 465$. Die Summe der ersten hundert Zahlen wird $= \frac{100^2 + 100}{2} = \frac{10000 + 100}{2}$

$= \frac{10100}{2} = 5050$.

II. Um die Summe der aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen, von 1 anfangend, d. h. $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$. zu finden, benenne man die nte ungerade Zahl mit u, so wird die allgemeine Formel für u, d. h. $u = a + (n - 1)d$ nunmehr diese: $u = 1 + (n - 1) \times 2$, weil 2 die Differenz dieser ungeraden Zahlen ist. Dieses gibt $u = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$; d. h. man findet die nte ungerade Zahl, wenn von 2n die Einheit subtrahirt wird. Setzt man nun diesen Werth von u in die bekannte Formel $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, so wird $s = (1 + 2n - 1) \times \frac{n}{2} = 2n \times \frac{n}{2} = n^2$. Dieses gibt die allgemeine Regel: Die Summe aller auf einanderfolgenden ungeraden, von 1 anfangenden Zahlen, bis zu einer, der Zahl nach gege-

benen ungeraden, ist dem Quadrate dieser letztern Zahl gleich.

So ist z. B. die Summe der ersten 20 ungeraden Zahlen $= 20 \times 20 = 400$ d. h. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 + 39 = 400$.

Die Summe der ersten 50 ungeraden Zahlen würde $= 50 \times 50 = 2500$, und die Summe der ersten 100 ungeraden Zahlen $= 100 \times 100 = 10000$ seyn.

III. Wenn ein Brunnen 30 Ellen tief ist, und man zahlt für die erste Elle zu graben 20 kr, für jede folgende aber 10 kr. mehr, so ist die Frage, wie viel die letzte Elle und wie viel der ganze Brunnen zu graben kostet?

Hier ist offenbar das letzte Glied und die Gliedersumme einer arithmetischen Progression zu finden, worin $a = 20$, $d = 10$ und $n = 30$ ist. Daher wird nunmehr $u = a + (n-1)d = 20 + (30-1) \times 10 = 20 + (29 \times 10) = 20 + 290 = 310$, d. h. die letzte Elle allein würde 310 kr. zu graben kosten.

Setzt man diesen Werth von u in die bekannte Formel $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, so wird $s = (20 + 310) \times \frac{30}{2} = 330 \times 15 = 4950$ kr. $= 82$ fl. 30.

IV. Wenn auf einem dreyeckig zugespitzten Dache in der obersten Reihe 4 Ziegeln, in der zweyten 7, in der dritten 10, u. s. f. sich befinden, und wenn solcher Reihen gerade 30 sind, so ist die Frage:

Wie viele Ziegeln enthält die unterste Reihe allein und wie viele befinden sich auf dem ganzen Dache?

Die Menge der Ziegeln bildet hier die Glieder einer arithmetischen Progression, worin $a = 4$, $d = 3$ und $n = 30$ ist. Daher wird $u = a + (n-1)d = 4 + (30-1) \times 3 = 4 + (29 \times 3) = 4 + 87 = 91$ d. h. die unterste Reihe enthält 91 Ziegeln. Um die Summe aller Ziegeln zu finden, setze man in der Formel $s = (a + u) \frac{n}{2}$ die bekannten Zahlenwerthe, so wird $s = (4 + 91) \times \frac{30}{2} = 95 + 15 = 1425$ als die Gesammtzahl aller Ziegeln.

V. Ein Reisender brauchte 19 Tage zur Vollendung seiner Reise und erinnerte sich, daß er an jedem Tage $1/4$ Meile mehr, als an dem vorhergehenden, und am letzten Tage $14\,1/2$ Meile zurückgelegt hat. Er hat aber vergessen, wie groß seine erste Tagreise war und wie viele Meilen die ganze Reise betrug. Beydes soll gefunden werden.

Offenbar ist hier das erste Glied einer arithmetischen Progression zu finden, worin $n = 19$, $u = 14\,1/2$ und $d = 1/4$ ist. Daher setze man in die oben gefundene Formel: $a = u - (n-1)d$ die hier gegebenen Werthe, so wird $a = 14\,1/2 - (19 - 1)\,1/4 = \frac{29}{2} - 18 \times 1/4 = \frac{29}{2} - \frac{18}{4} - \frac{58 - 18}{4} = \frac{40}{4} = 10$ daher betrug die erste Tagreise 10 Meilen.

Um s zu finden, bediene man sich der Formel $s = (a + u) \frac{n}{2}$, so wird $s = (10 + 14\,1/2) \frac{19}{2} =$

$\left(10 + \frac{29}{2}\right) \frac{\times 19}{2} = \frac{49}{2} \times \frac{19}{2} = 232\,1/4$, oder die ganze Reise betrug 232 1/4 Meilen.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Worauf beruht die Entwickelung der Formel: $u = a + (n-1)d$? Beyspiele? Ableitung der Formeln: $d = \frac{u-a}{n-1}$; $n = \frac{u-a}{d} + 1$ und $a = u - (n-1)d$? Erläuterung in Beyspielen? (§. 1.)

II. Beweis der Formel $s = (a + u)\frac{n}{2}$ wenn n eine gerade, oder eine ungerade Zahl ist? Beyspiele? Ableitung der Formel a: $= \frac{2s}{n} - u$; $u = \frac{2s}{n} - a$ und n $= \frac{2s}{a+u}$? Beyspiele in Zahlen? (§. 2.)

III. Was ist der Betrag folgender Summen:

1 + 2 + 3 + 4 + ... 300?

1 + 2 + 3 + 4 + ... 425?

1 + 3 + 5 + 7 + ... bis zur 45ten ungeraden Zahl?

1 + 3 + 5 + 7 + ... bis zur 124ten ungeraden Zahl?

Wenn bey einem zu grabenden Brunnen die erste Elle 24 kr. und jede folgende Elle 12 kr. mehr zu graben kostet, und der Brunnen 26 Ellen tief ist. Wieviel kostet derselbe?

III. Lehrübung.

Elementarlehren von der geometrischen Progression.

§. 1.

Entwickelung der Formel $u = a \times e^{n-1}$ nebst Folgen daraus.

I. Bey jeder geometrischen Progression lassen sich, so wie in der arithmetischen, fünf Stücke betrachten: Das erste Glied oder a, der Exponent oder e, das letzte Glied oder u, die Zahl der Glieder oder n, und die Summe aller Progressionsglieder, oder s.

II. Aus dem Begriffe und der Entstehung einer geometrischen Progression folgt sogleich, daß jedes Glied derselben einen bestimmten Werth habe, sobald man das erste Glied und den Exponenten kennt. Denn da jedes folgende Glied aus dem nächst vorhergehenden dadurch entsteht, daß letzteres mit dem Exponenten multiplicirt wird, so ist jedes Glied als ein Product aus dem ersten Gliede in eine Potenz des Exponenten anzusehen.

Wenn das erste Glied a und der Exponent e ist, so ergibt sich dieses unmittelbar aus der Progression: $a, ae, ae^2, ae^3, ae^4, ae^5, ae^6$.

III. Auch sieht man sogleich, daß das dritte Glied den Exponenten auf der zweyten Potenz, das vierte Glied den Exponenten auf der dritten Potenz u. s. f. enthält, wodurch also das nte Glied diesen Exponenten auf der Potenz $n-1$ erhalten wird. Nennt man

dieses nte Glied der Progression u, so ist $u = a \times e^{n-1}$ Dieses gibt die allgemeine Regel: Man findet die Größe von irgend einem Gliede der geometrischen Progression, wenn das erste Glied mit jener Potenz des Exponenten multiplicirt wird, deren Grad der Gliederzahl weniger 1 gleich ist.

Wäre $a = 4$, $e = 2$ und $n = 8$ so würde $u = 4 \times 2^{8-1} = 4 \times 2^7 = 4 \times 128 = 512$ und die Progression wäre diese:

4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.

Setzte man $a = 1$ und $e = 3$, so würde das 9te Glied oder $u = 1 \times 3^{9-1} = 3^8 = 6561$ und die Progression wäre daher:

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561.

IV. In dieser Formel $u = a \times e^{n-1}$ kann auch der Werth von a, und jener von e leicht bestimmt werden. Wenn man nämlich auf beyden Seiten mit e^{n-1} dividirt, so wird $a = \frac{u}{e^{n-1}}$, welches die Regel gibt: Man findet das erste Glied einer geometrischen Progression, wenn das letzte Glied durch jene Potenz des Exponenten dividirt wird, deren Grad der Gliederzahl weniger 1 gleich ist.

Wie groß ist das erste Glied einer geometrischen Progression, deren letztes Glied $= 6561$, deren Exponent $= 3$ und deren Gliederzahl $= 9$ ist? Hier wird

$a = \frac{6561}{3^8} = \frac{6561}{6561} = 1$ d. h. das erste Glied dieser Progression ist $= 1$.

V. Um aus der Formel $u = a \times e^{n-1}$ den Werth von e zu finden, dividire man beyderseits mit a, wodurch $\frac{u}{a} = e^{n-1}$ wird. Zieht man nun auf beyden Seiten die Wurzel vom Grade $n-1$ aus, so wird $\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = e$ woraus folgende Regel hervorgeht:

Wenn man das letzte Glied durch das erste dividirt und aus dem Quotienten jene Wurzel zieht, deren Grad der Gliederzahl weniger 1 gleich ist, so erhält man den Exponenten der Progression.

Wie groß ist in einer geometrischen Progression der Exponent, wenn ihr letztes Glied $= 6561$, das erste Glied $= 1$ und die Gliederzahl $= 9$ ist? Hier wird $e = \sqrt[n-1]{\frac{6564}{1}} = \sqrt[8]{6561} = 3$.

VI. Wie man hier aus der Zahl 6561 die Wurzel der achten Potenz bequem finden könne, wird in dem folgenden Lehrgange von den Logarithmen gezeigt werden. Um sich einstweilen von der Richtigkeit dieser Wurzel zu überzeugen, darf man sie nur, durch wirkliches siebenmaliges Multipliciren mit sich selbst, zur achten Potenz erheben, wodurch die Zahl 5661 entsteht.

Noch könnte man fragen, wie in der Formel $u = a \times e^{n-1}$ der Werth von n gefunden werde. Die Antwort hierauf läßt sich ebenfalls erst in dem folgenden Lehrgange ertheilen.

§. 2.

Entwickelung der Formel $s = \frac{a \times e_n - a}{e - 1}$ nebst Folgerungen hieraus.

I. Um in einer geometrischen Progression die Summe aller Glieder zu finden, bemerke man zuerst folgenden Lehrsatz:

Wenn man das erste Glied einer geometrischen Progression von ihrem letzten Gliede subtrahirt und die erhaltene Differenz durch den um eine Einheit verminderten Exponenten dividirt, so erhält man die Summe aller Progressionsglieder weniger dem letzten Gliede.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich durch folgende Rechnung. Die gegebene Progression sey:

$a, ae, ae^2, ae^3, ae^4, ae^5$, so ist ihr letztes Glied $= ae^5$. Da nun das erste Glied $= a$ ist, so stellt $ae^5 - a$ die Differenz vom letzten und ersten Gliede dar. Da ferner der Exponent $= e$ ist, so wird $e - 1$ der um 1 verminderte Exponent seyn und die wirkliche Division mit $e - 1$ in $ae^5 - a$ gibt Folgendes:

Divisor	Dividend	Quotient
$e - 1$	$ae^5 - a$	$ae^4 + ae^3 + ae^2 + ae + a$
	$ae^5 - ae^4$	
	$ae^4 - a$	
	$ae^4 - ae^3$	
	$ae^3 - a$	
	$ae^3 - ae^2$	
	$ae^2 - a$	
	$ae^2 - ae$	
	$ae - a$	
	$ae - a$	
	* *	

Da der erhaltene Quotient:

$$a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^4$$

die Summe aller Glieder der gegebenen Progression weniger dem letzten Gliede darstellt, so ist der obige Lehrsatz hierdurch bewiesen.

II. Hieraus folgt schon eine bequeme Methode, um die Summe aller Glieder einer in Zahlen gegebenen Progression zu finden. Man berechne nämlich jenes Glied, welches nach dem gegebenen letzten folgen würde, ziehe das erste Glied davon ab und dividire den Rest durch den um 1 verminderten Exponenten, so ist der Quotient der Summe aller Progressionsglieder gleich. Es sey die gegebene Progression diese:

2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374, so wird das nächste Glied nach dem gegebenen letzten gefunden,

wenn man 4374 mit 3 multiplicirt, welches 13122 gibt. Daher ist die Summe der gegebenen Progressionsglieder $= \frac{13122 - 2}{3 - 1} = \frac{13120}{2} = 6560$, wie auch die gewöhnliche Summirung dieser Glieder lehrt.

Setzt man aber im Allgemeinen die Gliederzahl $= n$, so würde das n^{te} Glied $= a \times e^{n-1}$ und folglich das $(n + 1^{te})$ Glied $= a \times e^{n}$ seyn. Daher findet man hier für die Summe aller Glieder den Ausdruck: $s = \frac{a \times e^n - a}{e - 1}$, welches die vorhin bemerkte Regel allgemein darstellt.

III. Aus dieser Formel $s = \frac{a\,e^n - a}{e - 1}$ kann man sowohl den Werth von a, als jenen von e ableiten.

Um a zu finden, setze man diesen Buchstaben in den Zähler des vorigen Bruchs als gemeinsamen Factor von e^n und 1, so erhält man $s = \frac{(e^n - 1) \times a}{e - 1}$

$= \frac{e^n - 1}{e - 1} \times a$. Wird nun auf beyden Seiten mit dem Bruche $\frac{e^n - 1}{e - 1}$ dividirt, so ist $a = \frac{s \times (e - 1)}{e^n - 1}$. Daher die Regel: Wenn die Summe aller Progressionsglieder mit dem um 1 verminderten Exponenten multiplicirt und dieses Product durch jene Potenz des Exponenten, deren Grad der Gliederzahl gleich ist und von deren Werth man 1 abgezogen hat, dividirt wird, so zeigt der Quotient das erste Progressionsglied an.

Die Summe aller Progressionsglieder sey 6560, das letzte Glied 4374 und die Gliederzahl $= 8$, so wird

$$a = \frac{6560 \times (3-1)}{3^8 - 1} = \frac{6560 \times 2}{6561 - 1} = \frac{13120}{6560} = 2,$$

und man kann die ganze Progression leicht bilden.

IV. Um eine Formel für e zu finden, bemerke man Folgendes. Da $u = ae^{n-1}$ ist, so wird, wenn man beyderseits mit e multiplicirt, $ue = ae^n$. Wird nun dieser Werth von ae^n in die obige Formel $s = \frac{ae^n - a}{e-1}$ gesetzt, so erhält man $s = \frac{ue - a}{e-1}$. Wird hier auf beyden Seiten mit $e - 1$ multiplicirt, so ist $se - s = ue - a$. Addirt man nun beyderseits s, so wird $se = ue - a + s$ und wenn beyderseits ue subtrahirt wird, so ist $se - ue = a + s$, oder $(s - u) \times e = s - a$ und daher, beyderseits mit $s - u$ dividirt, endlich $e = \frac{s-a}{s-u}$.

Daher entsteht die Regel: Man findet den Exponenten der geometrischen Progression, wenn von der Summe aller Progressionsglieder das erste Glied und von eben dieser Summe auch das letzte Glied abgezogen, und mit der letztern Differenz in die erstere dividirt wird.

Es sey in einer Progression die Summe aller Glieder $= 6560$, das erste Glied sey $= 2$, und das letzte Glied $= 4374$, so wird $e = \frac{6560 - 2}{6460 - 4374}$

$$= \frac{6558}{2186} = 3.$$

Auch könnte man hier nach der Größe der Gliederzahl fragen, d. h. eine Formel verlangen, worin n durch s, a, e und u bestimmt würde, welche aber ohne Logarithmen nicht gegeben werden kann.

§. 3.

Anwendungen der seitherigen Formeln.

I. Ein Pharaospieler setzt auf eine Karte 2 fl. und verliert. Er nimmt sich vor, diesen Satz zu verdreyfachen und verliert wieder. Nachdem er im Ganzen auf diese Weise 8mal gesetzt und 8mal verloren hatte, war sein ganzer Geldvorrath erschöpft. Wie viel hat er durch die achte Karte allein, und wie viel im Ganzen verloren?

Man sieht leicht, daß die im einzelnen verlornen Summen die Glieder einer geometrischen Progression bilden, deren erstes Glied $= 2$ und deren Exponent $= 3$ ist. Daher wird $u = a \times e^{n-1} = 2 \times 3^{8-1} = 2 \times 3^7 = 2 \times 2187 = 4374$ d. h. der Spieler hat durch die achte Karte 4374 fl. verloren.

Die Summe aller Glieder wird hier bequem dadurch gefunden, daß man das nächstfolgende Glied berechnet, welches $= 13122$ ist, von diesem das erste Glied oder 2 subtrahirt und den Rest $= 13120$ durch den um 1 verminderten Exponenten, d. h. durch $3 - 1 = 2$ dividirt, wodurch man 6560 als die Summe des ganzen Verlustes erhält.

II. Wie viel betrug der ganze Gewinn eines Spielers, welcher mit 2 fl. Einsatz und immer fortgesetzter Verdopplung desselben 10mal nach einander gewonnen hatte.

Man sieht sogleich, daß hier aus den Werthen von a, e und u, die Größe von s zu finden ist. Die bekannte Formel $s = \frac{ae^n - a}{e - 1}$ wird hier $= \frac{2 \times 2^{10} - 2}{2 - 1} = \frac{2 \times 1024 - 2}{2 - 1} = 2048 - 2 =$ 2046, welche Zahl die im Ganzen gewonnene Summe bezeichnet.

III. Wenn ein Spieler, bey immer wiederholter Verdoppelung des Einsatzes, 8mal nach einander und im Ganzen 765 fl. verloren hat. Wie viel betrug sein erster Einsatz? Es ist klar, daß man hier aus dem Werthe von n, e und s den Werth von a finden soll. Daher gebrauche man die Formel: $a = \frac{s \times (e - 1)}{e^n - 1}$, wodurch $a = \frac{765 \times 1}{2^8 - 1} = \frac{765}{256 - 1} = \frac{765}{255} = 3$ wird. Folglich betrug der erste Einsatz 3 fl.

IV. Wenn man ein Wagenpferd unter der Bedingung kaufen wollte, daß für den ersten Hufnagel 1 Pfennig, für den zweyten Hufnagel 2 Pfennige, für den dritten 4 Pfennige, u. s. f. für jeden folgenden noch einmal so viele Pfennige, als für den zunächst vorhergehenden bezahlt würden, so soll man den Kaufpreis dieses Pferdes bey 32 Hufnägeln bestimmen.

Hier kömmt es darauf an, in einer Progression, deren erstes Glied $= 1$, deren Exponent $= 2$ und deren Gliederzahl $= 32$ ist, die Summe aller Glieder zu finden. Daher wird $s = \frac{ae^n - a}{e - 1} = 2^{32} - 1$

$= 2^{32} - 1 = 4294967296 - 1 = 4294967295$ Pfennige, welches eine Summe von 17895697 fl. 3 kr. 3 Pf. gibt.

V. Das bekannte Schachspiel soll eine Erfindung des Indiers Sessa seyn, welchem sein König für diese Erfindung eine sich selbst zu wählende Belohnung versprochen hat. Sessa begehrte für das erste Feld des Schachbrettes 1 Fruchtkorn, für das zweyte Feld 2 Fruchtkörner, für das dritte 4 Körner u. s. w. Da nun das Schachbrett aus 64 Feldern besteht, so ist die Zahl der sämmtlichen Fruchtkörner zu bestimmen.

Aus dieser Frage geht hervor, daß man die Summe einer geometrischen Progression finden solle, worin $a = 1$, $e = 2$ und $n = 64$ ist. Nimmt man die bekannte Formel $s = \frac{a \times e^n - a}{e - 1}$, so wird hier

$$s = \frac{1 \times 2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615.$$

Rechnet man ungefähr 491520 Fruchtkörner auf einen Sack, so betrüge vorstehende Zahl 37529996804754 solcher Säcke und wenn man dem Erfinder täglich eine Million dieser Säcke hätte verabreichen können, so würde man erst nach 102821 Jahren damit fertig werden können. Bestände die gesammte Erdoberfläche aus Ackerland, so würden mehr als 70 Erndten nothwendig seyn, um eine so ungeheure Menge von Fruchtkörnern zu erhalten.

§. 4.

Etwas von der Summirung unendlicher Reihen.

I. Man versteht unter einer unendlichen Reihe eine solche, deren Gliederzahl unendlich groß ist. Schon die gewöhnliche Arithmetik führt in manchen Fällen auf solche unendliche Reihen. Beyspiele davon hatten wir oben bey der Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche und bey der Ausziehung der Quadrat- und Cubicwurzeln aus solchen Zahlen, welche keine vollkommene Quadrate oder Würfel sind.

So war z. B. $\frac{5}{7} = 0{,}713285713285\ldots$. welche Reihe, mit steter Wiederholung von denselbigen 6 Ziffern, ins Unendliche fortschreitet. Da die Summe dieser unendlich vielen Glieder immer noch um etwas kleiner, als $\frac{5}{7}$ seyn muß, so sieht man hieraus, daß die Summe der Glieder, auch wenn ihrer unendlich viele sind, dennoch eine gewisse Größe $\left(\text{hier } \frac{5}{7}\right)$ nicht vollkommen erreicht. Bedenkt man aber auf der andern Seite, daß der Fehler nie so viel betragen kann, als einer von jenen Decimalbruchtheilen, bis auf welchen man die Reihe fortsetzt, so wird klar, daß man sich dem genauen Werthe von $\frac{5}{7}$ so sehr nähern kann, daß der Fehler weniger, als irgend eine angebliche Größe beträgt. Wollte man z. B. nicht um 0,000001 fehlen, so könnte man sich mit den ersten sechs Bruchstellen begnügen. Wollte man nicht um

0,000000000001 fehlen, so dürfte man nur bis zur zwölften Bruchstelle fortfahren u. s. w.

II. Hieraus ergibt sich der Begriff von der Summirung einer unendlichen Reihe, welche, wie von selbst einleuchtend ist, entweder eine steigende oder fallende seyn kann.

Die Summirung einer ins Unendliche abnehmenden geometrischen Progressionen beruht darauf, daß man in der Reihe a, ae, ae^2, ae^3, ae^4 u. s. f. den Exponenten e als einen ächten Bruch und n, oder die Gliederzahl, als eine ungemein große Zahl betrachtet. In diesem Falle wird das n^{te} Glied, oder $a \times e^{n-1}$ eine so ungemein kleine Zahl seyn, daß man sie $= o$ setzen kann. Daher wird nun in der bekannten Formel $s = \frac{a \times e^n - a}{e - 1}$ der Factor $a \times e^n$ ebenfalls $= o$, da e^n hier noch kleiner ist, als e^{n-1}. Daher ist die Summe aller Glieder einer unendlichen Reihe, oder $s = \frac{-a}{e-1}$. Um den Zähler positiv zu erhalten, multiplicire man sowohl Zähler als Nenner dieses Bruchs mit -1, so wird $s = \frac{a}{1-e}$, welches folgende Regel gibt: Wenn man das erste Glied einer ins Unendliche abnehmenden geometrischen Reihe durch die Differenz dividirt, welche durch Subtraction ihres Exponenten von 1 gefunden wird, so gibt der Quotient die Summe aller Glieder dieser Reihe an.

III. Wäre die Reihe diese:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots$ so

wird $s = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$ d. h. die Summe dieser unendlich vielen Glieder würde $= 1$ seyn. Wenn man daher von irgend einer Größe die Hälfte, den Viertheil, den Achttheil, den Sechzehntheil, den Zweyunddreyßigtheil u. s. f. ins Unendliche nimmt, so ist die Summe aller dieser Stücke der ganzen Größe gleich.

IV. Durch ähnliche Rechnungen findet man die Summen folgender Reihen:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \ldots = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \ldots = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \frac{1}{3125} + \ldots = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{100000} + \ldots = \frac{1}{9}$$

V. Will man diese Reihe allgemein darstellen, so ist $\frac{1}{n}$ ihr erstes Glied und sie wird folgende:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5} + \ldots = \frac{1}{n-1}.$$

Die wirkliche Division von $n - 1$ in 1 gibt ebendieses; nämlich:

$$n-1 \;\Big|\; \begin{array}{l} 1 \\ 1-\frac{1}{n} \end{array} \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \ldots .$$

$$\begin{array}{r} +\frac{1}{n} \\ \hline * \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +\frac{1}{n} \quad -\frac{1}{n^2} \\ \hline * \quad +\frac{1}{n^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +\frac{1}{n^2} \quad \frac{1}{n^3} \\ \hline * \quad +\frac{1}{n^3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} \\ \hline * \quad +\frac{1}{n^4} \text{ Rest.} \end{array}$$

VI. Wenn nun n eine ganze Zahl und die Menge der Glieder sehr groß ist, so müssen die zuletzt stehenden Glieder sehr klein seyn. Wäre z. B. n nur $= 2$, so würde schon das 32te Glied $= \frac{1}{4294967296}$ und folglich so klein seyn, daß man es in den meisten Fällen $= 0$ setzen kann. Hätte die Reihe nun z. B. 50 Glieder, so würde das 50te Glied $= \frac{1}{2^{50}}$ und folglich noch eine weit kleinere Größe seyn. Daher kann auch vorstehende Division beweisen, daß die Summe der unendlichen Reihe: $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \ldots$

$= \frac{1}{n-1}$ ist.

VII. Hieraus gehen auch die Summirungen folgender Reihen hervor:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243} + \ldots = 2$$

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{45} + \frac{2}{135} + \frac{2}{405} \mp \ldots = \frac{3}{5}$$

$$a + a \cdot \frac{m}{n} + a \cdot \frac{n^2}{m^2} + a \cdot \frac{n^3}{m^3} + a \cdot \frac{n^4}{m^4} + \ldots = \frac{a \cdot m}{m - n}$$

In Zahlen wäre hier z. B.

$$4 + 4 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{8}{27} + 4 \cdot \frac{16}{81} + \ldots = 12.$$

In der ersten dieser Reihen ist der Exponent $= \frac{2}{3}$, in der zweyten ist er $= \frac{1}{5}$, in der dritten ist er $= \frac{n}{m}$ und in der vierten ist er wieder $= \frac{2}{3}$.

§. 5.

Uebungs-Fragen.

I. Wie viele Stücke kann man bei einer geometrischen Progression besonders betrachten? Wie wird die Formel: $u = a \times e^{n-1}$ entwickelt? Wie entstehen aus dieser die Formeln: $a = \frac{u}{e^{n-1}}$ und $e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$? Beyspiele zur Erläuterung? (§. 1.)

II. Wodurch wird die Formel $s = \frac{a \cdot e^n - a}{e - 1}$ bewiesen? Wie die Formeln: $a = \frac{s \times (e-1)}{e^n - 1}$ und $e = \frac{s - a}{s - u}$? Beyspiele zur Erläuterung? (§. 2.)

III. a) Ein Kaufmann hat in dem ersten Monate 50 fl. und in jedem folgenden $1\frac{1}{2}$ mal so viel gewonnen. Was betrug sein Gewinn im 10ten Monate?

b) Wenn ein Bedienter im zwölften Monate seines Dienstes 256 fl. und in jedem Monate doppelt so viel, als im vorhergehenden erhalten hatte; wie viel betrug der Lohn für den ersten Monat?

c) Ein Kaufmann hatte in dem ersten Monate 1 fl. und in dem letzten 6561 fl. verdient und weiß, daß sein Verdienst in jeder Woche dreymal so viel, als in der vorhergehenden betrug. Wie viele Wochen dauerte dieses Geschäft?

d) Wenn 5 Menschen eine Summe Geldes unter der Bedingung zusammenschießen wollen, daß der erste 9 fl. und jeder folgende 3 mal so viel, als der vorhergehende geben will. Wieviel gibt der letzte und wieviel beträgt die ganze Summe? (§. 3.)

IV. Was ist die Summe folgender unendlichen Reihen:

a) $\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \frac{81}{256} + \frac{243}{1024} + \frac{729}{4096} \ldots$

b) $\frac{3}{5} + \frac{9}{25} + \frac{27}{75} + \frac{81}{375} + \frac{243}{1875} + \ldots$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{27} + \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{81} + \ldots$

d) $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{16} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{64} + \ldots$

e) $\frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{9} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{27} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{81} + \ldots$

f) $6 + 6 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{16} + 6 \cdot \frac{1}{64} + 6 \cdot \frac{1}{256} + 6 \cdot \frac{1}{1024} + \ldots$

g) $2 + 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{8}{27} + 2 \cdot \frac{16}{81} + 2 \cdot \frac{82}{243} + \ldots$

(§. 4.)

Vierzehnter Lehrgang.

Die Rechnung mit den Logarithmen.

I. Lehrübung.

Entstehung und Haupteigenschaften der Logarithmen.

§. 1.

Verbindung einer arithmetischen und geometrischen Reihe.

I. Die Logarithmen entstehen aus der gehörigen Vergleichung der Glieder einer arithmetischen Progression mit jenen einer geometrischen. Ehe diese Verbindung Statt finden kann, muß gezeigt werden, wie man jede arithmetische Reihe in eine andere von demselbigen Unterschiede, deren erstes Glied = 0 ist, und wie man ferner jede geometrische Reihe in eine andere von demselbigen Exponenten verwandeln kann, deren erstes Glied = 1 ist.

Es seyen beyde Reihen folgende:

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, a+6d \ldots$

$a, ae, ae^2, ae^3, ae^4, ae^5, ae^6 \ldots$

so werden, wenn man von jedem der ersten Reihe das erste Glied a subtrahirt, und wenn man jedes Glied der zweyten Reihe durch dieses erste Glied a dividirt, folgende zwey Progressionen entstehen:

$0, d, 2d, 3d, 4d, 5d, 6d \ldots$

$1, e, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6 \ldots$

wodurch der Foderung entsprochen worden ist.

II. Aus Betrachtung dieser Reihen ergibt sich, daß in der arithmetischen jedes folgende Glied ein Mehrfaches der Differenz, und daß in der geometrischen Reihe jedes folgende Glied eine Potenz des Exponenten ist.

Da man diese Reihen auch so schreiben kann:

$0d, 1d, 2d, 3d, 4d, 5d, 6d \ldots$ und

$e^0, e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6 \ldots$

so ergibt sich ferner, daß die Coefficienten von den Gliedern der ersten Reihe zugleich auch die Exponenten jener Glieder der geometrischen Reihe sind, welche sich unterhalb derselben befinden.

III. Setzt man beyde Reihen rückwärts fort, so entstehen folgende:

$-d, -2d, -3d, -4d, -5d, -6d \; -7d \ldots.$

$\frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^3}, \frac{1}{e^4}, \frac{1}{e^5}, \frac{1}{e^6} \; \frac{1}{e^7} \ldots.$

und man sieht, daß die geometrische Reihe auch also gesetzt werden kann:

$e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, e^{-4}, e^{-5}, e^{-6}, e^{-7}$

Zieht man von jedem Gliede der arithmetischen Reihe die Größe d ab, so entsteht für die positive Reihe diese: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... für die negative Reihe aber folgende: 0, −1, −2, −3, −4, −5, −6, −7 .... welche die Reihenfolge der natürlichen Zahlen und zugleich auch jene der Potenz-Exponenten der Glieder der geometrischen Progression darstellt.

IV. Werden diese beyden Reihen nun gehörig zusammengestellt, so entsteht folgende Verbindung:

... −5 −4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4 +5 ...

... e^{-5} e^{-4} e^{-3} e^{-2} e^{-1} e^{0} e^{+1} e^{+2} e^{+3} e^{+4} e^{+5} ...

woraus hervorgeht, daß 0 als der Anfangspunct der arithmetischen; e^0 oder 1 aber als der Anfangspunct der geometrischen Progression betrachtet werden kann, welche sich zu beyden Seiten ins Unendliche forterstrecken. Auch sieht man, daß die Exponenten der Glieder in der geometrischen Reihe eine arithmetische Progression bilden, welche von 0 anfangend auf der einen Seite durch alle auf einanderfolgende ganze positive und auf der andern Seite durch alle auf einanderfolgende negative Zahlen ins Unendliche fortlaufen.

V. Das Verhältniß $e^0 : e^1$ d. h. das Verhältniß von 1 : e bestimmt den Werth aller folgenden Glieder der ganzen Progression, sowohl zur Rechten als zur Linken. Daher sagt man, dieses Verhältniß bilde den Grund der ganzen Reihe und nennt es deshalb das Grundverhältniß. Da aber e^0 immer = 1 ist, so hängt der Werth dieses Grundverhältnisses eigentlich von der Größe der Zahl e ab. Daher wird e die Grundzahl genennt, und es ist klar, daß es für eine bestimmte Grundzahl auch nur eine einzige bestimmte geometrische Progression gibt. Wäre e = 10, so wäre auch $e^0 : e^1$ = 1 : 10 und die Progression folgende:

... 0,001; 0,01; 0,1; 1; 10; 100; 1000; 10000 ...

welche man auch so schreiben könnte:

... 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^{0}, 10^{+1}, 10^{+2}, 10^{+3}, 10^{+4} ....

Nähme man aber e = 2, so würde das Grundverhältniß 1 : 2 und die Reihe folgende:

$\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ oder

$\ldots 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^{+1}, 2^{+2}, 2^{+3}, 2^{+4}, 2^{+5} \ldots$.

V. Da $e^0 : e^1$ ein Verhältniß und dem Verhältnisse von $e^1 : e^2$ gleich ist, so liegen zwischen $e^0 : e^2$, auch zwey solcher Grundverhältnisse. Da ferner $e^0 : e^1 = e^1 : e^2 = e^2 : e^3$, so liegen zwischen $e^0 : e^3$ wieder drey solcher Grundverhältnisse, und es ist klar, daß zwischen $e^0 : e^4$ auch vier, zwischen $e^0 : e^5$ fünf und allgemein zwischen $e^0 : e^{n-1}$ auch $n - 1$ dieser Grundverhältnisse liegen, deren jedes $= 1 : e$ ist.

§. 2.

Entstehung und Bedeutung des Logarithmen.

I. Da nun die Zahl der Grundverhältnisse, welche zwischen dem ersten Progressionsgliede e^0 und irgend einem andern Gliede derselben liegen, jedesmal durch den Exponenten dieses letztern Gliedes angegeben wird, so hat man diese Exponenten die Verhältnißzähler oder Logarithmen (von λογον und αριθμος) genennt. In der Reihe: $e^0, e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, \ldots$ $e^{n-1}, e^n \ldots$ ist daher 0 der Logarithmus von e^0 $(= 1)$ weil ein Glied noch kein Verhältniß bildet und somit auch bey einem Gliede noch kein Verhältniß gezählt werden kann; der Logarithmus von e ist 1, weil von $1 : e$ ein Grundverhältniß liegt; der Logarithmus von e^7 ist 7, weil von 1 bis e^7 auch sieben solcher Grundverhältnisse liegen. Hieraus sieht man, was es für eine Bedeutung habe, wenn

man sagt, einem Gliede der geometrischen Progression gehöre irgend eine Zahl als Logarithme zu. Es heißt dieses soviel, als von 1 bis zu jenem Gliede liegen so viele Grundverhältnisse, als der Logarithmus durch seine Einheiten andeutet.

II. Da die Grundzahl willkührlich genommen werden kann, so sind unendlich vielerley geometrische Reihen denkbar, in welchen Glieder von verschiedener Größe immer dieselbigen Logarithmen haben. Wenn die Grundzahl 2 oder 3 oder 10 wäre, so entständen folgende 3 Reihen, zu deren jeder die vierte Reihe als Logarithmen-Reihe gehörte. Nämlich:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64	geometr. Reihen.
1, 3, 9, 27, 81, 243, 729	
1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000...	
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... Logarithmen.	

Der Logarithmus 4 gehört hier zu den Gliedern 16, 81, 10000 da von 1 bis 16, von 1 bis 81 und von 1 bis 10000 vier Grundverhältnisse liegen, deren jedes entweder 1:2 oder 1:3, oder 1:10 ist.

III. Soll diese Unbestimmtheit, nach welcher der nämliche Logarithme verschiedenen Zahlen angehört, hinwegfallen, so muß ein für allemal eine bestimmte Zahl als Grundzahl gewählt werden. Man ist übereingekommen, diese Grundzahl, dem decadischen Gesetze gemäß, = 10 zu setzen, wodurch ein bestimmtes Logarithmen-System entsteht, in welchem jeder Logarithmus einem bestimmten Gliede angehört, so wie umgekehrt jedes Glied auch nur einen bestimmten Logarithmus hat. Nach diesem System ist die

Reihe der Progressionsglieder und ihrer Logarithmen folgende:

...0,0001; 0,001; 0,01; 0,1; 1; 10; 100; 1000; 10000; 100000...
: — 4; — 3; — 2; —1; 0; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ...

woraus sich auch die Bedeutung der negativen Logarithmen ergibt. Wenn nämlich die Logarithmen überhaupt Verhältnißzähler sind, so werden die negativen Logarithmen die negativen Verhältnisse zählen. Es ist aber das Verhältniß 1 : 0,1 dem Verhältnisse von 1 : 10 entgegengesetzt, da 0, 1 zehnmal kleiner als 1; die Zahl 10 aber zehnmal größer als 1 ist. Nennt man daher das Verhältniß 1 : 10 ein positives, so ist das Verhältniß 1 : 0,1 ein negatives.

Hieraus ergibt es sich, daß negative Logarithmen den ächten Brüchen angehören, so wie umgekehrt alle ächte Brüche negative Logarithmen haben müssen.

§. 3.

Eigenschaften der Logarithmen in Bezug auf Multipliciren und Dividiren.

Aus den im Bisherigen erklärten Eigenschaften der Logarithmen, in Bezug auf ihre Entstehung und Bedeutung, ergeben sich folgende Sätze, worauf die bequeme Rechnung mit diesen Zahlen beruht:

I. Man findet den Logarithmus eines Productes, wenn man die Logarithmen der Factoren dieses Products zusammen addirt. Wäre z. B. ab das Product, so würde Log. ab = Log. a + Log. b seyn.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich daraus, daß die Logarithmen aller bestimmten Progressionsglieder zugleich die Exponenten jener Potenzen sind, welche diese Glieder vorstellen. Nähme man z. B. aus der Reihe: e^0, e^1, e^2, e^3 .... die Factoren e^4 und e^7, um das Product aus ihnen zu bilden, so ist Log. $e^4 = 4$ und Log. $e^7 = 7$; daher die Summe dieser Logarithmen $= 4 + 7 = 11$. Aber um das Product $e^4 \times e^7$ zu bilden, müssen die Exponenten, (da Potenzen von einerley Wurzeln zu multipliciren sind) ebenfalls addirt werden, und es muß daher Log. $(e^4 \times e^7) = 11$ seyn.

Eben dieses hat Statt bey negativen Exponenten, und es ist z. B. Log. $(e^{-5} \times e^{+9}) = -5 + 9 = +4$. Da nun der Log. $+ 4$ dem Progressionsgliede e^4 zugehört, so ist e^4 das verlangte Product, wie auch schon daraus hervorgeht, daß $e^{-5} \times e^{+9} = e^4$ ist.

Hätte man daher Tabellen, worin sich die Logarithmen aller Zahlen befänden und man sollte eine Multiplication aus zwey Factoren durch Hülfe der Logarithmen ausführen, so dürfte man nur für jeden Factor den zugehörigen Log. aufsuchen, diese Logarithmen addiren und die Summe in der Reihe der Logarithmen suchen, so würde nebendaran das verlangte Product stehen. Daher wird die Multiplication der Zahlen in eine, gewöhnlich weit leichtere Addition ihrer Logarithmen verwandelt.

Auf gleiche Weise ist auch Log. abc = Log. a + Log. b + Log. c.

II. Der Log. eines Quotienten wird gefunden, wenn man vom Log. des Dividenden

jenen des Divisors subtrahirt, oder Log. $\frac{a}{b}$ = Log. a — Log. b.

Dieses ergibt sich wieder daraus, daß die Logarithmen der Progressionsglieder zugleich auch jene Exponenten der Grundzahl sind, wodurch letztere, wenn sie zu diesen Potenzen erhoben wird, jenen Gliedern gleich ist.

Wäre z. B. e^{11} zu dividiren durch e^7, so gäbe die gewöhnliche Division der Potenzen von einerley Wurzeln e^4 zum Quotienten, da 11 — 7 = 4 ist. Nun ist aber auch Log. e^{11} = 11 und Log. e^7 = 7; folglich stellt auch 11 — 7 den Unterschied vom Log. des Dividenden und jenem des Divisors dar.

Sollte man $e^3 : e^8$ durch Logarithmen rechnen, so ist Log. e^3 = 3, Log. e^8 = 8 und Log. e^3 — Log. e^8 = 3 — 8 = — 5. Daher ist — 5 der Log. des Quotienten, und, weil ihm die Zahl $e^{-5} = \frac{1}{e^5}$ zugehört, so ist dieser Bruch der zu findende Quotient.

Könnte man die Logarithmen aller Zahlen mit Leichtigkeit finden, so dürfte man nur die Logarithmen des gegebenen Dividenden und Divisors suchen, den letztern vom erstern abziehen und zur Differenz, als Logarithmus, die zugehörige Zahl suchen, welche der verlangte Quotient wäre.

Da das Subtrahiren gewöhnlich weit einfacher, als das Dividiren ist, so ergibt sich auch hieraus eine Erleichterung im Rechnen.

Auch folgt daraus wieder, daß der Logarithmus

eines jeden ächten Bruchs negativ werde, da der Logarithme des Nenners bey ihnen größer ist, als der Logarithme seines Zählers.

§. 4.

Eigenschaften der Logarithmen in Bezug auf das Potenziren und Wurzelausziehen.

III. Man findet den Logarithmus einer Potenz, wenn man den Log. ihrer Wurzel mit dem Grade dieser Potenz multiplicirt; oder Log. $a^3 = 3 \times$ Log. a.

Da $a^3 = a \times a \times a$, so ist auch Log. $a^3 =$ Log. a + Log. a + Log. $a = 3 \times$ Log. a. Da sich dieser Beweis für jede andere Potenz von a führen läßt, so ist er allgemein und man hat überhaupt Log. $a^n = n \times$ Log. a.

Wäre z. B. das Progressionsglied e^2 zur 10ten Potenz zu erheben, so müßte man den Log. von e^2 mit 10 multipliciren. Es ist aber Log. $e^2 = 2$ daher Log. $e^2 \times 10 = 2 \times 10 = 20$. Da nun zu 20, als Logarithmus, das Progressionsglied e^{20} gehört, so ist auch die zehnte Potenz von e^2 der Größe e^{20} gleich. Die gewöhnliche Rechnung gibt eben dieses, da $(e^2)^{10} = e^{2 \times 10} = e^{20}$ ist.

Die Logarithmen-Rechnung verwandelt daher das Potenziren in ein Multipliciren der Logarithmen.

IV. Man findet den Logarithmen einer Wurzelgröße, wenn der Logarithmus jener Zahl, woraus die Wurzel gezogen werden soll, durch den Grad der Wurzel dividirt wird; oder Log. $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}$ Log. a.

Denn gleichwie das Multipliciren eines Logarithmus dem Potenziren der, demselben angehörigen Zahl entspricht, so muß auch umgekehrt das Dividiren eines Logarithmen dem Wurzelausziehen der ihm zugehörigen Zahl entsprechen.

Daß z. B. Log. $\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$ Log. a sey, läßt sich auch dadurch nachweisen, daß $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ und folglich Log. $a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ Log. a ist.

Soll man daher aus einer gegebenen Zahl die Wurzel irgend eines Grades ziehen, so muß der Logarithmus dieser Zahl durch den Grad dieser Wurzel dividirt und zu dem erhaltenen Logarithmus die gehörige Zahl gesucht werden, welche die verlangte Wurzel ist.

Hierdurch sieht man, daß das beschwerliche Ausziehen höherer Wurzeln in ein einfaches Dividiren der Logarithmen verwandelt wird, wodurch eine ausserordentliche Erleichterung im Rechnen hervorgeht.

Um aber diese Vortheile der Logarithmen-Rechnungen wirklich zu genießen, muß man ein Mittel haben, den Logarithmen einer jeden gegebenen Zahl mit Leichtigkeit zu finden. Wie dieses wirklich geschehen kann und wie man im Stande war, die sogenannten Logarithmen-Tafeln zu verfertigen, wird in der nächsten Lehrübung näher erörtert werden.

§. 4.

Uebungs-Fragen.

I. Wie wird eine arithmetische Reihe mit einer geometrischen verbunden, um die Logarithmen entstehen zu lassen? Was nennt man das Grundverhältniß? was die Grundzahl? (§. 1.).

II. Was sind die Logarithmen als Verhältnißzähler? Was nennt man ein Logarithmensystem? Wieviele solcher Logarithmensysteme sind möglich? Was sind negative Logarithmen? und welchen Gliedern gehören sie an? (§. 2.).

III. Wie findet man den Logarithmen eines Productes, eines Quotienten, einer Potenz und einer Wurzelgröße? Worin liegt der Grund dieser Regeln? Welche Vortheile wird also die Logarithmen-Rechnung gewähren? Was setzt aber diese Rechnung als Hülfsmittel voraus? (§. 3 und 4.).

II. Lehrübung.

Erklärung des Logarithmen-Systems, und der logarithmischen Tafeln.

§. 1.

Das Logarithmensystem von Briggs.

I. Aus den bisherigen Sätzen erhellet, daß es unzählig vielerley Logarithmensysteme geben könne. Die Reihe der Logarithmen ist zwar immer dieselbige, da sie mit Null anfängt und nach der Reihenfolge der natürlichen ganzen Zahlen auf der einen Seite in der positiven, auf der andern in der negativen Bedeutung sich ins Unendliche forterstreckt. Allein die geo-

metrische Reihe kann unendlich mannigfaltig seyn, da die Grundzahl unendlich vielerley Werthe haben kann. Wenn dieselbe, dem decadischen Gesetze gemäß, = 10 gesetzt wird; so, daß 1 : 10 das Grundverhältniß ist, so wird dieses System das gewöhnliche, gemeine, oder auch das Briggssche genennt, weil Henry Briggs, welcher im Jahre 1630 zu Oxford gestorben ist, die ersten Logarithmentafeln herausgegeben hat. Die ersten Mathematiker aber, welche solche Tafeln berechnet haben, waren Jobst Byrg in Deutschland und Neper in Schottland.

Nach diesem Logarithmensysteme ist daher

Log. 1 = 0
Log. 10 = 1
Log. 100 = 2
Log. 1000 = 3
Log. 10000 = 4
Log. 100000 = 5
Log. 1000000 = 6, eben so auch
Log. 0,1 = − 1
Log. 0,01 = − 2
Log. 0,001 = − 3
Log. 0,0001 = − 4
Log. 0,00001 = − 5
Log. 0,000001 = − 6

Da es aber darauf ankömmt, die Logarithmen aller Zahlen zu kennen, welche zwischen 1 und 10, zwischen 10 und 100, zwischen 100 und 1000 u. s. f. eben so jener Zahlen, welche zwischen 0 und 1; zwischen 1 und 0,1; zwischen 0,1 und 0,01 u. s. w. liegen, so entsteht die, für die practische Logarithmen-

Rechnung höchst wichtige Frage: Wie kann man die Logarithmen von allen diesen Zwischenzahlen finden, um hierdurch die Logarithmentafeln zu bilden? Diese Frage läßt sich am besten durch Auflösung eines wirklichen Beyspiels beantworten.

§. 2.

Berechnung des Logarithmen, welcher der Zahl 9 angehört.

I. Da 9 zwischen 1 und 10 liegt, so muß Log. 9 größer als 0 und kleiner als 1 seyn, oder mit andern Worten, wenn zwischen 1 : 10 ein ganzes Grundverhältniß liegt, so muß das Verhältniß von 1 : 9 nur ein Theil dieses Grundverhältnisses seyn, und die Frage: Was ist Log. 9? heißt so viel als: Was für ein Theil des Grundverhältnisses 1 : 10 ist das Verhältniß von 1 : 9? oder auch: Welche Potenz von 10 ist der Zahl 9 gleich? Die Zahl, welche dieses andeutet, ist Log. 9.

Nimmt man $1 : c = c : 10$, so heißt das Verhältniß von 1 : c die Hälfte des Verhältnisses 1 : 10, wobey zu bemerken ist, daß man hier unter der Hälfte eines Verhältnisses nicht ein solches versteht, dessen Exponent der Hälfte vom Exponenten des vorigen, sondern dessen Exponent der Quadratwurzel aus dem vorigen Exponenten gleich ist. Da nun hier $c = \sqrt{10} = 3{,}1622777$ wird, so ist das Verhältniß von 1 : 3,1622777 dem halben Verhältnisse von 1 : 10 gleich und der Logarithme von 3,1622777 ist $= \frac{1}{2} = 0{,}5$.

III. Da nun 9 zwischen 3,1622777 und 10 fällt, so setze man die Proportion $3{,}1622777 : d = d : 10$, so wird $d = \sqrt{3{,}1622777 \times 10} = \sqrt{31{,}622777} = 5{,}6234132$. Da nun Log. $3{,}1622777 = \frac{1}{2}$ und Log. $10 = 1$ ist, so wird Log. $5{,}6234132 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4} = 0{,}75$ d. h. von 1 bis 5,6234132 liegt $\frac{3}{4}$ des Grundverhältnisses von 1 : 10, oder jenes Verhältniß ist $\frac{3}{4}$ von diesem.

Es folgt auch hieraus, daß $10^{\frac{3}{4}} = 5{,}6234132$ sey. Daß aber $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{10^3}$ ist, wurde bereits oben gezeigt.

IV. Nun liegt die gegebene Zahl 9 zwischen 5,6234132 und 10, daher setze man $5{,}6234132 : e = e : 10$, so wird $e = \sqrt{56{,}234132} = 7{,}4989421$ und Log. $7{,}4989421 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + 1\right) = \frac{7}{8} = 0{,}875$.

V. Weil nun die 9 wieder zwischen 10 und 7,4989421 fällt, so sey $10 : f = f : 7{,}4989421$, welches $f = \sqrt{74{,}989421}$ gibt, oder 8,6596432. Daher ist Log. $8{,}6596432 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{7}{8}\right) = \frac{15}{16} = 0{,}9375$.

Da die Zahl 8,6596432 nicht für die gegebene Zahl 9 gesetzt werden kann, weil der Unterschied von beyden allzu beträchtlich ist, so muß diese Rechnung noch weiter fortgesetzt werden.

VI. Da nun die 9 zwischen 10 und 8,6596432

fällt, so sey 10 : g = g : 8,6596432, welches g = $\sqrt{}$ 86,596432 = 9,3057204 und Log. 9,3057204 = $\frac{1}{2}\left(1+\frac{15}{16}\right)=\frac{31}{32}$ = 0,96875 gibt.

VII. Da nun wiederum die 9 zunächst zwischen 9,3057204 (in (VI.) und 8,6596432 (in V.) fällt, so sey 9,3057204 : h = h : 8,6596432, welches h = 8,9768713, und Log. 8,9768713 = $\frac{1}{2}\left(\frac{31}{32}+\frac{15}{16}\right)$ = $\frac{61}{64}$ = 0,953125 gibt.

VIII. Nun fällt die 9 wieder zwischen die Werthe von g (in VI.) und von h (in VII.). Daher sey 9,3057204 : i = i : 8,9768713, woraus i = 9,1398170 und Log. 9,1398170 = $\frac{1}{2}$ (0,96875 + 0,953125) = 0,9609375 wird.

IX. Da nunmehr die Zahl 9 zwischen die Werthe 9,1398170 und 8,9768713 fällt, so muß in der Proportion: 9,1398170 : k = k : 8,9768713 der Werth von k gefunden werden. Man erhält k = 9,0579777 und Log. 9,0579777 = $\frac{1}{2}$ (0,9609375 + 0,953125) = 0,95703125.

X. Auf die hier angedeutete Weise muß nun diese höchst beschwerliche Rechnung so lange fortgeführt werden, bis man auf eine mittlere geometrische Proportionalzahl fällt, welche = 9,0000000 ist, bey welcher erst in der achten Decimalbruchstelle noch eine Ziffer erscheint, die man, auch wenn sie eine 9 wäre vernachläßigen kann, indem sie nur 9 hundertmillionstel, folglich noch nicht 1 zehnmillionstel bedeutet.

Die Fortsetzung dieser Rechnung ergibt sich aus nachstehender Uebersicht, woraus hervorgeht, daß man 28mal die Quadratwurzel ausziehen mußte, um diesen Zweck zu erreichen.

	Mittlere geometrische Proportionalzahlen.	Zugehörige Logarithmen.
XI.	9,0579777 = k	0,95703125
	9,0173333 = l	0,95507812
	8,9768713 = h	0,95312500
XII.	9,0173333 = l	0,95507812
	8,9970796 = m	0,95410156
	8,9768713 = h	0,95312500
XIII.	9,0173333 = l	0,95507812
	9,0072008 = n	0,95458984
	8,9970796 = m	0,95410156
XIV.	9,0072008 = n	0,95458984
	9,0021388 = o	0,95434570
	8,9970796 = m	0,95410156
XV.	9,0021388 = o	0,95434570
	8,9996088 = p	0,95422363
	8,9970796 = m	0,95410156
XVI.	9,0021388 = o	0,95434570
	9,0008737 = q	0,95428467
	8,9996088 = p	0,95422363
XVII.	9,0008737 = q	0,95428467
	9,0002412 = r	0,95425415
	8,9996088 = p	0,95422363

	Mittlere geometrische Proportionalzahlen.	Zugehörige Logarithmen.
XVIII.	9,0002412 = r	0,95425415
	8,9999250 = s	0,95423889
	8,9996088 = p	0,95422363
XIX.	9,0002412 = r	0,95425415
	9,0000831 = t	0,95424652
	8,9999250 = s	0,95423889
XX.	9,0000831 = t	0,95424652
	9,0000041 = v	0,95424271
	8,9999250 = s	0,95423889
XXI.	9,0000041 = v	0,95424271
	8,9999650 = x	0,95424080
	8,9999250 = s	0,95423889
XXII.	9,0000041 = v	0,95424271
	8,9999845 = y	0,95424175
	8,9999650 = x	0,95424080
XXIII.	9,0000041 = v	0,95424271
	8,9999943 = z	0,95424223
	8,9999845 = y	0,95424175
XXIV.	9,0000041 = ν	0,95424271
	8,9999992 = α	0,95424247
	8,9999943 = z	0,95424223
XXV.	9,0000041 = ν	0,95424271
	9,0000016 = β	0,95424259
	8,9999992 = α	0,95424247
XXVI.	9,0000016 = β	0,95424259
	9,0000004 = ν	0,95424253
	8,999992 = α	0,95424247

	Mittlere geometrische Proportionalzahlen.	Zugehörige Logarithmen.
XXVII.	9,0000004 = ν	0,95424253
	8,9999998 = δ	0,95424250
	8,9999992 = α	0,95424247
XXVIII.	9,0000004 = ν	0,95424253
	9,0000000 = ε	0,95424252
	8,9999998 = δ	0,95424250

Diese, durch 28maliges Quadratwurzelausziehen gefundene Zahl 9,0000000, deren Logarithme 0,95424252 und welche von der Zahl 9 nicht um 0,00000001 verschieden ist, kann ohne bedeutenden Fehler für 9 gesetzt werden. Daher ist das Verhältniß von $1:9 = \frac{9}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{4}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{5}{10000000} + \frac{2}{100000000}$ des Grundverhältnisses 1:10; d. h. es muß $10^{0,95424252} = 9$ seyn.

§. 3.

Wirkliche Verfertigung der Logarithmen-Tafeln.

I. Aus diesem Beyspiele sieht man die Möglichkeit, die Logarithmen aller Zwischenglieder in der decadischen Reihe zu berechnen, und man muß sowohl den Fleis, als die Gedult jener Mathematiker bewundern, welche diese höchstbeschwerliche Rechnungen zuerst wirklich ausgeführt haben. Später erfundene Methoden, die Logarithmen derselben weit bequemer

zu berechnen, waren ihnen noch unbekannt. Indessen brauchten sie nicht die Logarithmen von allen Zwischengliedern, sondern nur von jenen so mühsam zu berechnen, welche absolute Primzahlen sind, d. h. welche auf keine Weise in Factoren, die ganze Zahlen sind, zerlegt werden können. Diese ersten absoluten Primzahlen sind folgende: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 51 u. s. w. denn alle übrige Zahlen können aus diesen durch Multiplication zusammengesetzt werden.

II. Die zwischen 1 und 10 fallenden Primzahlen und ihre Logarithmen sind folgende:

Log. 2 = 0,3010300
Log. 3 = 0,4771213
Log. 5 = 0,6989700
Log. 7 = 0,8450980

Hieraus wird nun Log. 4 = 2 x Log. 2 = 2 x 0,3010300 = 0,6020600

Log. 6 = Log. 2 + Log. 3 = 0,7781513
Log. 8 = Log. 2 + Log. 4 = 0,9030900
Log. 9 = Log. 3 + Log. 3 = 0,9542425
Log. 12 = Log. 3 + Log. 4 = 1,0791812
Log. 14 = Log. 2 + Log. 7 = 1,1461280
Log. 15 = Log. 3 + Log. 5 = 1,1760913
Log. 16 = Log. 2 + Log. 8 = 1,2041200
Log. 18 = Log. 3 + Log. 6 = 1,2552725
Log. 20 = Log. 2 + Log. 10 = 1,3010300
Log. 21 = Log. 3 + Log. 7 = 1,3222193
Log. 22 = Log. 2 + Log. 11 = 1,3424227
Log. 24 = Log. 3 + Log. 8 = 1,3802112
Log. 25 = Log. 5 + Log. 5 = 1,3979400

Da aus der Multiplication dieser wenigen Zahlen wiederum eine sehr große Menge anderer entstehen, so sieht man, mit welcher Leichtigkeit die Logarithmen dieser Zahlen berechnet werden konnten.

§. 4.

Die Kennziffer und Mantisse jedes Logarithmen.

I. Jeder Logarithme besteht aus zwey Haupttheilen, welche die Kennziffer (Characteristik) und die Mantisse heißen. Unter der Kennziffer versteht man jene Zahl, welche sich zur Linken des Einerstrichs befindet und 0, 1, 2, 3, 4, 5,.... n seyn kann. Mantisse aber heißt man den Inbegriff aller Decimalbruchstellen, welche der Logarithme noch enthält. Da z. B. Log. 86 = 1, 9344985 ist, so heißt 1 seine Kennziffer; der Decimalbruch 0,9344985 aber seine Mantisse. Die Logarithmen jener Zahlen, welche die Hauptglieder der geometrischen Progression bilden, haben nur eine Kennziffer und keine Mantisse. Da z. B. Log. 1 = 0, Log. 10 = 1, Log. 100 = 2 Log. 1000 = 3 u. s. f. ist.

II. Die Benennung Kennziffer hat ihren Grund darin, daß man aus derselben sogleich erkennt, zwischen welche Hauptglieder der geometrischen Reihe jene Zahl fällt, welche diesem Logarithmus zugehört. Der Log. sey 2,6843572 so geht aus seiner Kennziffer 2 hervor, daß die ihm zugehörige Zahl größer als Hundert und kleiner als Tausend sey.

Umgekehrt kann man bey irgend einer gegebenen Zahl sogleich die Kennziffer des ihr angehörigen Loga-

rithmen bestimmen. Wäre z. B. 8743 diese Zahl, so fällt sie zwischen die Hauptglieder 1000 und 10000, und muß daher 3 zur Kennziffer haben.

Hieraus entsteht folgende allgemeine Regel:

a) Wenn ein Logarithme gegeben ist, so besteht die ihm angehörige ganze Zahl aus einer Ziffer mehr, als wie viele Einheiten seine Kennziffer hat, und

b) Wenn man zu einer gegebenen ganzen Zahl den Logarithmen finden soll, so enthält seine Kennziffer eine Einheit weniger, als aus wie vielen Ziffern jene Zahl besteht.

Daher kann man die Kennziffer aller Logarithmen ohne Zuziehung von irgend einer Tafel bestimmen, und es kömmt bey der ganzen Logarithmen Rechnung vorzüglich auf die Kenntniß der Mantissen an.

§. 5.

Uebungs-Fragen.

I. Was ist das gemeine oder Briggs'sche Logarithmensystem? Welche Mathematiker haben die Log. zuerst berechnet? Welche wichtige Frage entsteht zunächst hierbey? (§. 1.)

II. Wie konnten die Logarithmen der Zwischenglieder berechnet werden? Wie hat man z. B. den Log. der Zahl 9 gefunden? (§. 2.)

III. Von welchen Zahlen mußten die Log. so mühsam berechnet werden? Wie kann man aus den Logarithmen der Zahlen 2, 3, 5, 7, folgende leicht berechnen: Log. 26, Log. 27, Log. 28, Log. 30, Log. 32, Log. 35, Log. 36, Log. 40, Log. 42, Log 45 . . . . ? (§. 3.)

IV. Aus welchen Haupttheilen besteht der Logarithme jeder Zahl? Was ist die Kennziffer? Was ist die

Mantisse? Was erkennt man aus der Kennziffer eines Logarithmen? Wie findet man die Kennziffer des, einer gegebenen Zahl zugehörigen Logarithmen? (§. 4.)

III. Lehrübung.

Bestimmung der, den gegebenen Zahlen zugehörigen Logarithmen.

§. 1.

Zu jeder ganzen Zahl von 1 bis 4 Ziffern den zugehörigen Logarithmus zu finden.

I. Zur Auflösung dieser und der folgenden Aufgaben dient die, dieser Schrift angehängte Logarithmentafel, vermittelst welcher man nicht nur die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000 sehr bequem finden, sondern auch die Logarithmen aller übrigen Zahlen von 5, 6 und 7 Ziffern (ohne die sich zur Rechten oder Linken derselben befindlichen Nullen mit zu zählen) durch eine leichte Rechnung bestimmen kann. Sie füllt in dieser neuen Gestalt nur etwas mehr als drey Bogen an, da z. B. die Vlacq'schen Tafeln mehr als 6 Bogen einnehmen.

II. Soll man den, zu einer Zahl von 1 bis 99 einschließlich gehörigen Logarithmen finden, so suche man diese Zahl in der mit Z bezeichneten Spalte auf, und der zu findende Logarithme steht unmittelbar zur Rechten neben ihr in der mit Null bezeichneten Spalte. Wenn weder die Kennziffer, noch die Zehntel der Mantisse dabey stehen, so werden beyde von dem zunächst darüber sich befindlichen Logarithmen heruntergenommen.

So ist z. B. Log. 20 = 1,3010300
Log. 21 = 1,3222193
Log. 25 = 1,3979400
Log. 51 = 1,7075702
Log. 58 = 1,7634280
Log. 72 = 1,8573325
Log. 79 = 1,8976271
Log. 99 = 1,9956352

III. Enthält aber die gegebene Zahl drey Ziffer und ist nicht größer als 999, so suche man in der mit 0, 100, 200, 300 bezeichneten, mit größern Ziffern bemerkten wagrechten Reihe, die gegebenen Hunderte; in der mit Z bezeichneten Spalte aber die gegebenen Einer und Zehner auf, so wird sich der Logarithmus da befinden, wo die von den Hunderten herabgezogene lothrechte und die von den Zehnern und Einern zur Rechten gezogene wagrechte Linie sich einander durchschneiden.

So ist z. B. Log. 114 = 2,0569048
Log. 225 = 2,3521825
Log. 333 = 2,5224442
Log. 248 = 2,3944517
Log. 336 = 2,5263393
Log. 278 = 2,4440448
Log. 390 = 2,5910646
Log. 399 = 2,6009729

IV. Auf ähnliche Weise verfährt man auch, wenn die gegebene Zahl größer als 999 ist. Nur hat die Logarithmentafel hier, zur größern Raumersparniß, die Einrichtung erhalten, daß sich in der obersten Horizontalreihe der mit größern Ziffern bemerkten Zahlen

jedesmal sechs Fächer neben einander befinden. Die unmittelbar darunterstehende wagrechte Reihe enthält in der zur Linken stehenden Ziffer die Kennziffer und in der nach dem Einerstrich stehenden Ziffer die Zehntel der Mantisse, welche beyde zu jenen übrigen 6 Decimalbruchstellen gesetzt werden, welche in der lothrechten Reihe der Hunderte und Tausende und in der wagrechten der Zehner und Einer der gegebenen Zahl da liegen, wo beyde Reihen zusammentreffen.

V. Wenn die Zehntel der Mantissen, welche auf der nämlichen Seite der Tafeln stehen, sich um eine Einheit erhöhen, was selten Statt findet, so ist in einer neuen Horizontalreihe die Kennziffer nebst diesem neuen Zehntel wiederholt worden. So ist z. B. Log. 794 = 2,8998205 und

Log. 795 = 2,9003671, in welchem letztern die Zehntel der Mantisse um eine Einheit größer sind, als in jenem. Daher wurde hier in einer wagrechten Reihe die Kennziffer und die Zehntel der Mantissen für jede der sechs Spalten von neuem gesetzt, und man findet nun z. B.

auf ähnliche Art Log. 1023 = 3,0098756
Log. 1194 = 3,0770043
Log. 1855 = 3,2683439
Log. 2362 = 3,3732799
Log. 2847 = 3,4543875
Log. 5027 = 3,7013089
Log. 4989 = 3,6980135
Log. 6607 = 3,8200043
Log. 7160 = 3,8549130
Log. 8264 = 3,9171903
Log. 9999 = 3,9999566

VI. Befänden sich zur Rechten der 4 zifferigen Zahl eine oder mehrere Nullen, so schneide man diese Nullen ab, suche den Logarithmus der übrigen Ziffer, und vermehre seine Kennziffer um so viele Einheiten, als sich Nullen an der Zahl befinden. Soll man z. B. den Log. von 3678000 finden, so suche man den Log. von 3678, welcher = 3,5656117 ist, und vermehre seine Kennziffer um 3, so wird Log. 3678000 = 6,5656117. Denn $3678000 = 3678 \times 1000$; folglich Log. (3678×1000) = Log. 3678 + Log. 1000 = 3,5656117 + 3 Ganze = 6,5656117. Eben dieses gilt von jedem andern ähnlichen Falle und es ist z. B. Log. 6852000000 = 9,8358174 u. s. w.

§. 2.

Den Logarithmus jedes Decimalbruchs zu finden, welcher 1, 2, 3 oder 4 Ziffer hat.

I. Wenn der gegebene Decimalbruch ein gemischter ist und ausser den Ganzen nur noch Zehntel enthält, so suche man zu allen Ziffern, als wären sie sämmtlich ganze Zahlen, den gehörigen Logarithmen und vermindern seine Kennziffer um 1, so ist dieses der zu findende Logarithme.

Sollte man z. B. Log. 8, 6 finden, so wird Log. 86 = 1,9344985 seyn, und wenn man dessen Kennziffer um 1 vermindert, so ist Log. 8, 6, = 0,9344985.

Der Grund dieses Verfahrens liegt darin, daß 8, $6 = \frac{86}{10}$ sind, woraus Log. $\frac{86}{10}$ = Log. (86 : 10) = Log. 86 — Log. 10 = 1,9344985 — 1 Ganzes = 0,9344985 wird.

Auf ähnliche Weise findet man die Logarithmen folgender Brüche:

Log. 48, 6 = 1,6866363
Log. 84, 9 = 1,9289077
Log. 125, 1 = 2,0972573
Log. 364, 8 = 2,5620548
Log. 764, 6 = 2,8834343
Log. 961, 2 = 2,9828138 u. s. w.

II. Enthält der gegebene Decimalbruch ausser den Ganzen noch Hunderttel oder Tausendtel, so verfahre man eben so und vermindere die Kennziffer des, der gegebenen Zahl zugehörigen Logarithmen um zwey oder drey Einheiten. So ist z. B.

Log. 57, 56 = 1,7601208
Log. 58, 56 = 1,7676011
Log. 68, 25 = 1,8341027
Log. 7, 652 = 0,8837750
Log. 9, 452 = 0,9755237
Log. 9, 999 = 0,9999566.

III. Wenn aber der gegebene Decimalbruch ein reiner ist, so suche man zu seinen Ziffern, als wären sie Ganze, den Logarithmus, setze seine Kennziffer = 0 und hänge zur Rechten seiner Mantisse die Kennziffer — 1, — 2, — 3, — 4 u. s. f. an, je nachdem der gegebene Bruch seine erste geltende Ziffer in den Zehntel, Hunderttel, Tausendtel, oder Zehntausendtel hat. So ist z. B. Log. 0,2715 = 0,4337698 — 1 denn $0{,}2715 = \frac{2715}{10000}$. Daher ist auch Log. 0,2715 = Log. 2715 — Log. 10000 = 3,4337698 — 4 = 0,4337698 — 1.

Diese, zur Rechten der Mantisse angehängte, negative Kennziffer deutet jene Decimalbruchstelle an, in welcher die erste geltende Ziffer des gegebenen Decimalbruchs sich befindet, und man muß wohl bemerken, daß die neben ihr stehende Mantisse durchaus positiv ist. Wollte man sie zu — 1 addiren, so müßte man sie von 1 abziehen und dem Reste das Zeichen des Negativen geben. Es ist nämlich 0,4337698 — 1 = — 0,5662302, wo denn diese ganze Mantisse negativ wäre. Da es aber zweckmäßiger ist, die Mantissen stets positiv zu lassen, so wird die erste geltende Bruchstelle der, den Logarithmen zugehörigen Zahl weit bequemer durch solche, den positiven Mantissen zur Rechten angehängte negative Kennziffer bezeichnet. Man setzt diese negative Kennziffer deshalb nicht zur Linken der Mantisse, damit nicht auch diese Mantisse selbst für negativ gehalten werde.

Hierdurch findet man folgende Resultate:

Log. 0,3 = 0,4771213 — 1
Log. 0,89 = 0,9493900 — 1
Log. 0,048 = 0,6812412 — 2
Log. 0,0517 = 0,7134905 — 2
Log. 0,001318 = 0,1199154 — 3
Log. 0,0004341 = 0,6375898 — 4
Log. 0,000009 = 0,9542425 — 6
Log. 0,0000086 = 0,9344985 — 6
Log. 0,000000007 = 0,8450980 — 9

Hieraus sieht man, daß auch die Logarithmen jener reinen Decimalbrüche sehr leicht gefunden werden können, welche, ausser vier gegebenen Ziffern,

zu ihrer Linken irgend eine beliebige Menge von Nullen haben, weil für jede dieser Nullen die negative Kennziffer um eine Einheit erhöht wird. So ist z. B. Log. 0, 000000005256 = 0,7206554 — 9 u. s. f.

§. 3.

Den Logarithmen jedes gemeinen Bruches, dessen Zähler und Nenner höchstens vier Ziffer enthält, zu finden.

I. Wenn man von einem gemeinen Bruche den Logarithmen finden soll, so ist vor Allem zu unterscheiden, ob derselbe ein unächter oder ächter ist.

Den Logarithmen eines unächten Bruchs findet man, wenn der Log. seines Nenners vom Log. seines Zählers abgezogen wird. So ist z. B. Log. $\frac{5167}{67}$ = Log. 5167 — Log. 67, welches folgende Rechnung gibt.

Log. 5167 = 3,7132385
Log. 67 = 1,8260748 daher

Log. $\frac{5167}{67}$ = 1,8871637.

Denn der Bruch $\frac{5167}{67}$ ist nichts anders, als ein Quotient aus dem Nenner in den Zähler, und der Log. eines Quotienten wird gefunden, wenn man den Log. des Divisors von dem Log. des Dividenden abzieht.

Auf gleiche Art gibt Log. $\frac{3874}{512}$ Folgendes:

Log. 3874 = 2,5881596
Log. 512 = 2,7092700 folglich ist

Log. $\frac{3874}{512}$ = 0,8788896.

Der Log. $\frac{5884}{9}$ wird so gefunden:

Log. 5884 = 3,7696727
Log. 9 = 0,9542425 daher ist

Log. $\frac{5844}{9}$ = 2,8154302

II. Ist aber der gegebene Bruch ein eigentlicher, so ist schon aus dem Bisherigen klar, daß sein Logarithme negativ werden muß, was man immer durch eine negative Kennziffer andeuten kann. Damit aber seine Mantisse positiv bleibe, hänge man an dessen Zähler 1, 2, 3, oder mehrere Nullen, bis derselbe zunächst größer, als sein Nenner wird, ziehe vom Log. des jetzigen Zählers den Log. des Nenners ab, gebe dieser Mantisse die Kennziffer 0, und setze zu ihrer Rechten eine negative Kennziffer mit so vielen Einheiten, als wie viele Nullen man an den Zähler gehängt hat.

Man soll Log. $\frac{5}{8}$ finden.

Hier ist Log. 50 = 1,6989700
Log. 8 = 0,9030900

folglich wird Log. $\frac{50}{8}$ = 0,7958800 — 1.

Da nun $\frac{50}{8} : 10 = \frac{5}{8}$, so muß auch Log. $\frac{50}{8}$ —

Log. 10 = Log. $\frac{5}{8}$ seyn, d. h. 0,7958800 — 1 =

Log. $\frac{5}{8}$. Verwandelt man den gegebenen Bruch $\frac{5}{8}$ in

einen Decimalbruch, so muß $\frac{5}{8} = 0{,}625$, folglich auch

Log. $\frac{5}{8}$ = Log. 0,625 seyn. Sucht man nun Log. 625

so ist derselbe = 2,7958800, woraus Log. 0,625 =

0,7958800 — 1 wird, wie vorhin.

III. Was ist Log. $\frac{17}{29}$? Hier wird

Log. 170 = 2,2304489 und
Log. 29 = 1,4623980 folglich

Log. $\frac{170}{29}$ = 0,7680509 und daher

Log. $\frac{17}{29}$ = 0,7680509 — 1

Was ist Log. $\frac{1}{5432}$? Hier wird

Log. 10000 = 4,0000000 und
Log. 5432 = 3,7349598 daher

Log. $\frac{10000}{5432}$ = 0,2650402 und daher

Log. $\frac{1}{5432}$ = 0,2650402 — 4.

Da man jeden gemeinen Bruch in einen ihm gleichen Decimalbruch verwandeln kann, so lassen sich die

Log. der gemeinen Brüche auch dadurch finden, daß sie zuerst in Decimalbrüche verwandelt werden, zu denen man nachher die Logarithmen sucht. Sollte man hierbey mehr als 4 Decimalbruchstellen finden, so könnte der zugehörige Logarithme ohne Beyhülfe der Aufgabe des nächsten §. jetzt noch nicht gefunden werden.

IV. Um die Logarithmen gemischter Zahlen zu finden, verwandle man dieselben in unächte Brüche, welche ihnen gleich sind und finde die, den letzten angehörigen Logarithmen. So ist z. B. Log. $9\frac{5}{8}$ = Log. $\frac{77}{8}$ = Log. 77 — Log. 8. Ferner Log. $10\frac{7}{9}$ = Log. $\frac{97}{9}$ = Log. 97 — Log. 9 u. s. f.

§. 4.

Den Logarithmen jeder ganzen oder gebrochenen Zahl von 5, 6 oder 7 Ziffer zu finden.

I. Um durch Hülfe der, dieser Schrift angehängten Logarithmentafel die Logarithmen aller 5, 6 und 7zifferigen Zahlen zu finden, bemerke man folgenden Hülfssatz: Wenn man von drey unmittelbar aufeinanderfolgenden vierzifferigen ganzen Zahlen die Logarithmen sucht und den Logarithmen der kleinsten vom Log. der mittlern, und dann auch vom Log. der größten Zahl abzieht, so bilden diese logarithmischen Differenzen ein Verhältniß, welches dem Verhältnisse 1 : 2 (d. h. dem Verhältnisse der entsprechenden Zahlen-Unterschiede) entweder ganz genau, oder sehr

nahe gleich ist. Die Richtigkeit dieses Satzes soll durch Beyspiele erläutert werden. Es ist z. B.

Log. 7634 = 3,8827522
Log. 7633 = 3,8826953 und
Log. 7632 = 3,8826384. Daher ist die logarithmische Differenz

der 2ten und 3ten Zahl = 0,0000569
der 1ten und 3ten Zahl = 0,0001138

und es wirklich ganz genau

1 : 2 = 0,0000569 : 0,0001138.

Wären die drey Zahlen und ihre Logarithmen folgende:

Log. 9467 = 3,9762124
Log. 9466 = 3,9761665 und
Log. 9465 = 3,9761206,

so ist die logarithmische Differenz der 2ten und 3ten Zahl = 0,0000459, ferner jene der 1ten und 3ten Zahl = 0,0000918, und es ist wieder

1 : 2 = 0,0000459 : 0,0000918.

II. Wenn nun z. B. der Logarithme von 76928 gefunden werden soll, so dividire man diese Zahl durch 10, wodurch sie = 7692,8 wird und daher größer als 7692 und kleiner als 7693 ist. Daher muß auch Log. 7692,8, größer als Log. 7691 und kleiner als Log. 6793 seyn. Nun ist aber:

Log. 7693 = 3,8860957
Log. 7692,8 soll gefunden werden
Log. 7692 = 3,8860393.

Da sich aber die Differenzen dieser Zahlen wie die Differenzen der ihnen zugehörigen Logarithmen verhalten, so hat man

1 : 0,8 = 3,8860957 — 3,8860393 : x,

worin x die Differenz von Log. 7692,8 — Log. 7692 bedeutet, oder es ist 1 : 0,8 = 0,0000564 : x woraus $x = 0{,}8 \times 0{,}0000564 = 0{,}00004512$ wird, wofür man 0,0000451 setzen kann, da die achte Decimalbruchstelle (wegen ihrer Kleinheit) für Nichts zu achten ist.

Wird nun diese logarithmische Differenz zum Logarithmen von 7692,8 addirt; nämlich:

Log. 7692 = 3,8860393
die logarithmische Differenz = 0,0000451

folglich Log. 7692,8 = 3,8860844
und folglich Log. 76928 = 4,8860844

§. 5.

Regeln zur bequemen Auflösung der Aufgabe des vorigen §.

Die Auflösung der im vorigen §. entwickelten Aufgabe läßt sich auf nachfolgende Regeln zurückführen:

I. Wenn die Zahl, deren Logarithmus gefunden werden soll, aus 5, 6 oder 7 Ziffern besteht, so schneide man von der Rechten zur Linken 1, 2 oder 3 Ziffer ab; so, daß sich zur Linken immer noch 4 Ziffer befinden;

II. Diese vierzifferige Zahl suche man in den Tafeln auf, ziehe ihren Logarithmen (ohne ihn herauszuschreiben) von dem Logarithmen der um 1 größern Zahl und bemerke diese Differenz, ohne die Nullen der höheren Bruchstellen, auf einem besondern Papiere;

III. Nun multiplicire man diese Differenz mit den

nach I. abgeschnittenen Ziffern und werfe im Producte so viele Ziffer von der Rechten zur Linken hinweg, als wie viele man nach I. abgeschnitten hatte. Wenn die höchste dieser weggeworfenen Ziffer größer als 5 ist, so wird die niedrigste der stehenbleibenden um eine Einheit vermehrt;

IV. Werden nun die in III. erhaltenen Ziffer zu den niedrigsten Bruchstellen des Logarithmen der in I. stehen gebliebenen vierzifferigen Zahl addirt, so gibt diese Summe die Mantisse des gesuchten Logarithmen, welcher man nun noch die gehörige Kennziffer beyfügt.

V. Anwendungen dieser Regeln.

1) Was ist Log. 68375?

Regel I. gibt 6837 | 5
Regel II. gibt zur Differenz: 635
Regel III. gibt 635 × 5 = 317 (5
Regel IV. gibt 3,8348656
1, 317 } addirt.

Log. 68375 = 4,8348973

2) Was ist Log. 17834?

Regel I. gibt 1783 | 4
Regel II. gibt zur Differenz: 2436
Regel III. gibt: 2436 × 4 = 974 (4
Regel IV. gibt 3,2511513
1, 974 } addirt.

Log. 17834 = 4,2512487

3) Was ist Log. 384625?

Regel I. gibt 3846 | 25
Regel II. gibt die Differenz 1129
Regel III. gibt 1129 × 25 = 282 (25

Regel IV. gibt 3,5850093
2, 282 } addirt.

5,5850375

4) Was ist Log. 578324?

Regel I. gibt 5783 | 24
Regel II. gibt die Differenz 751
Regel III. gibt 751 × 24 = 180 (24
Regel IV. gibt 3,7621532
2, 180 } addirt.

Log. 578324 = 5,7621712

5) Was ist Log. 6832479?

Regel I. gibt 6832 | 479
Regel II. gibt zur Differenz 635
Regel III. gibt 635 × 479 = 304 (165
Regel IV. gibt 3,8345479
3, 304 } addirt.

Log. 6832479 = 6,8345783

6) Was ist Log. 8130472?

Regel I. gibt 8130 | 472
Regel II. gibt zur Differenz 535
Regel III. gibt 535 × 472 = 252 (520
Regel IV. gibt 3,9100905
3, 252 } addirt.

Log. 8130472 = 6,9101157

VI. Wenn eine gegebene Zahl aus mehr, als sieben Ziffern besteht; aber als ein Product zweyer oder mehrerer andern, deren jede weniger, als sieben Ziffer enthält, anzusehen ist, so findet man ihren Logarithmen, wenn man die Logarithmen ihrer Factoren

zusammen addirt und dieser Summe die gehörige, leicht zu bestimmende Kennziffer gibt. So ist z. B. $8367 \times 6734 = 56343378$ und man findet den Logarithmen derselben durch folgende Rechnung

Log. 8367 = 3,9225698
Log. 6734 = 3,8282731

Folglich ist 7,7508429 der Logarithme, welcher der gegebenen Zahl 56343378 zugehört.

Da $9267 \times 4234 \times 434 = 18028674852$ ist, so findet man den Logarithmen dieser Zahl auf ähnliche Weise. Nämlich:

Log. 9267 = 3,9669392
Log. 4234 = 3,6267509
Log. 434 = 2,6374897

Folglich wird Log. 18028674852 = 10,2311798

Hieraus sieht man, daß nur von jenen, mehr als siebenzifferigen Zahlen die Logarithmen durch die, dieser Schrift angehängte Tafel, nicht gefunden werden können, welche absolute Primzahlen, d. h. nicht aus andern als Factoren zusammengesetzt sind.

§. 5.

Uebungs-Fragen.

I. Welche Einrichtung hat die, dieser Schrift angehängte Logarithmentafel? Wie findet man durch sie folgende Logarithmen? Log. 38; Log. 56; Log. 68; Log. 97? Log. 276; Log. 321; Log. 367; Log. 380; Log. 864; Log. 999; Log. 1001; Log. 1832; Log. 3876; Log. 5870; Log. 8392; (§. 1.)

II. Wie findet man den Log. eines gemischten und reinen Decimalbruchs? Wie findet man folgende Logarithmen:

Log. 8,6; Log. 82,7; Log. 74,6; Log. 94,6; Log. 8,37; Log. 3,74; Log. 5,32; Log. 138,7; Log. 276,3; Log. 36,24; Log. 7,624; Log. 0,8; Log. 0,74; Log. 0,543; Log. 0,0004; Log. 0,00003246; Log. 8,00043? (§. 2.)

III. Wie werden die Logarithmen gemeiner Brüche gefunden? Was ist Log. $\frac{7}{9}$; Log. $\frac{8}{11}$; Log. $\frac{17}{3}$; Log. $\frac{26}{8}$; Log. $\frac{374}{216}$; Log. $\frac{1}{273}$; Log. $\frac{3}{874}$ (§. 3.)

IV. Wie findet man die Logarithmen der 5, 6 und 7 zifferigen Zahlen? Was ist Log. 87452; Log. 327654; Log. 371421; Log. 873,6452; Log. 0,3247189? Log. $\frac{327}{8454276}$; (§. 4.)

V. Auf welche einfache Regeln läßt sich die Beantwortung der Frage in IV. zurückführen? Erläuterung durch Beyspiele? Wie findet man die Log. vielziffriger Zahlen, welche höchstens aus 7 zifferigen Factoren bestehen? (§. 5.)

IV. Lehrübung.

Bestimmung der, den gegebenen Logarithmen zugehörigen Zahlen.

§. 1.

Die einem Logarithmen angehörige Zahl bis auf 4 Ziffer zu finden.

I. Die Aufgabe: zu einem gegebenen Logarithmen die gehörige Zahl zu finden, ist die umgekehrte von jener, welche in der jüngst vorhergehenden Lehrübung aufgelößt wurde und von gleicher Wichtigkeit für die practische Logarithmenrechnung, da man nur durch

sie im Stande ist, jene Zahlenwerthe zu finden, welche als Rechnungsresultate gesucht werden.

II. Wenn ein gegebener Logarithme nach allen Ziffern seiner Mantisse genau in den Tafeln gefunden wird (ein Fall, welcher sehr selten eintritt) so ist die dabeystehende Zahl die ihm zugehörige, welche nur noch, in Bezug auf die Kennziffer des gegebenen Logarithmen, gehörig bestimmt werden muß. Auch sucht man die Bruchstellen der Mantisse jedesmal unter der Kennziffer 3, d. h. unter den vierzifferigen Zahlen auf. So gehört z. B.

3,4643405 zur Zahl 2913
3,4811559 zur Zahl 3028
3,7421750 zur Zahl 5523
3,7745900 zur Zahl 5951
2,8778319 zur Zahl 754,8
1,9282422 zur Zahl 84,77
0,9507055 zur Zahl 8,927
0,9818639 — 1 zur Zahl 0,9591
0,6537912 — 2 zur Zahl 0,04506
0,7820424 — 5 zur Zahl 0,00006054 u. s. w.

III. Findet man aber, wie dies gewöhnlich der Fall ist, die sämmtlichen Bruchstellen der Mantisse nicht ganz genau in der Tafel, so suche man die zunächst kleinere Mantisse in derselben und nehme die zur letztern gehörige Zahl, so ist diese, wenn sie nach der gegebenen Kennziffer gehörig bestimmt wird, die zunächst kleinere Zahl, welche dem gegebenen Logarithmen angehört. So gehört z. B. zum Logarithmen 3,7225589 die zunächst kleinere Mantisse 0,7225517 in den Tafeln, bey welcher die Zahl

5279 steht. Daher wird die zu findende Zahl größer als 5279 und kleiner als 5280 seyn. Da man hierbey noch um 0, 9 fehlen könnte, so wird es nothwendig, in diesem Falle auſſer den Ganzen noch mehrere Decimalbruchstellen zu finden.

Wäre der gegebene Logarithmus dieser 2,8629087, so fände man in den Tafeln den Logarithmen 3,8629062 als jenen, dessen Mantisse die zunächst kleinere ist. Da nun zu diesem die Zahl 7293 gehört, so ist die zu findende Zahl = 729, 3, wobey man höchstens um 0, 09 fehlen kann.

Wäre der gegebene Logarithme folgender 0,9761724, so fände man in den Tafeln den Logarithmen 3,9761665, welcher in seiner Mantisse der zunächst kleinere ist und wozu die Zahl 9466 gehört. Daher ist die zum gegebenen Log. gehörige Zahl = 9,466, wobey der mögliche Fehler höchstens 0,0009 beträgt. Da nun dieser Fehler in den meisten Fällen der practischen Anwendungen schon für Nichts zu achten ist, so könnte man sich mit der hier gefundenen Zahl begnügen.

Wäre der gegebene Logarithme dieser: 0,5873898 — 3 so würde in den Tafeln der Log. 3,5873742 der zunächst kleinere seyn. Da nun die ihm zugehörige Zahl = 3867 ist, so muß dieselbe nur noch nach der Kennziffer — 3 gehörig bestimmt werden. Da nun diese Kennziffer den Tausendtel entspricht, so wird die zu findende Zahl = 0,003867, welche deshalb schon sehr genau ist, da der Fehler kein Milliontel der Einheit beträgt.

§. 2.

Die, den gegebenen Logarithmen zugehörigen Zahlen in 5, 6 oder 7 Ziffer zu finden.

I. Zur Auflösung dieser Aufgabe dienet der bereits oben gebrauchte Hülfssatz, daß sich, schon bey vierzifferigen Zahlen, die Differenzen der Logarithmen wie die Differenzen der ihnen angehörigen Zahlen verhalten.

Wie dieser Hülfssatz hier gebraucht wird, ergibt sich am Faßlichsten aus folgenden Beyspielen:

Welche Zahl gehört zum Logarithmen 1,5827593? Wird diese Mantisse in der Logarithmentafel unter der Kennziffer 3 aufgesucht, so ist

3,5827450 der zunächst kleinere und 3,5828585 der zunächst größere Logarithme in Rücksicht der Mantisse. Bestimmt man nun die logarithmischen Differenzen, so ist die Differenz der größten und kleinsten Mantisse diese:

0,5828585 größte Mantisse und
0,5827450 kleinste Mantisse, folglich

0,0001135 die erste logarithmische Differenz. Auf gleiche Weise ist

0,5827593 die gegebene Mantisse und
0,5827450 die kleinste Mantisse, also

0,0000143 die zweyte logarithmische Differenz.

Da nun zur größten Mantisse die Ziffer 3827 und zur kleinsten Mantisse 3826 gehören, welche nur um 1 verschieden sind, so bilde man die Proportion:

$$0{,}0001135 : 0{,}0000143 = 1 : x,$$

wo x jenen Decimalbruchstellen gleich ist, welche noch

zur Zahl 4826 gehören. Führt man die Division des ersten Gliedes in das zweyte gehörig aus, welches dadurch geschieht, daß mit 1135 in 143 wirklich dividirt wird, so erhält man zum Quotienten 0,125. Daher sind die, der gegebenen Mantisse zugehörigen 7 Ziffer diese: 3826125. Da aber die Kennziffer des gegebenen Logarithmen = 1 ist, so wird 38,26125 die zum Log. 1,5817593 gehörige Zahl, wobey nicht um ein Hunderttausendtel gefehlt wird.

II. Aus dieser Auflösung kann man folgende einfache Regeln, welche das ganze Verfahren abkürzen, zum practischen Gebrauche feststellen.

I. Regel. Man ziehe von der gegebenen Mantisse die zunächst kleinere der Logarithmen-Tafel ab und bemerke sowohl die zur letztern gehörigen vier Ziffer, als auch die sich ergebende logarithmische Differenz.

II. Regel. Nun ziehe man auch diese zunächst kleinere Mantisse von der zunächst größern in den Tafeln ab und bemerke sie ebenfalls.

III. Regel. Sodann dividire man mit der in II. erhaltenen größern Differenz in die aus I. erhaltene kleinere und bestimme hierdurch drey Ziffer des Quotienten.

IV. Endlich setze man diese in III. gefundenen drey Ziffer zur Rechten der in I. erhaltenen vier Ziffer und bestimme, nach der Kennziffer des gegebenen Logarithmen, die Ganzen und die Bruchstellen, so ist die demselben zugehörige Zahl gefunden.

III. Anwendungen dieser Regeln.

1) Was für eine Zahl gehört zum Log. 0,5387426?

Regel I. gibt zur ersten logarithmischen Differenz: 423 und als Ziffer der Zahl: 3457.

Regel II. gibt zur zweyten logarithmischen Differenz: 1256.

Regel III. gibt aus der Division von 1256 in 432 die Bruchstellen: 0,343.

Regel IV. gibt folgende sieben Ziffer: 1257343, und somit, da die Kennziffer = 0 ist, die Zahl: 1,257343.

2) Welche Zahl gehört zum Log. 2,4518794?

Regel I. gibt die erste logarithmische Differenz = 930 und die vier ersten Ziffer = 2830.

Regel II. gibt zur zweyten logarithmischen Differenz: 1535.

Regel III. gibt aus der Division von 1535 in 930 den Quotienten: 0,605.

Regel IV. gibt folgende sieben Ziffer: 2830605. Daher ist, wegen der Kennziffer 2, die zu findende Zahl = 283,0605.

3) Was für eine Zahl gehört zum Logarithmen 0,8374965 — 2?

Regel I. gibt die erste Differenz = 343 und die vier ersten Ziffer der Zahl = 6878.

Regel II. gibt zur zweyten Differenz 631.

Regel III. gibt durch Division von 631 in 343 zum Quotienten: 0,543.

Regel IV. gibt die sieben Ziffer 6878543. Da nun die Kennziffer — 2 ist, so beginnt die zu findende Zahl mit Hunderttel und ist daher = 0,06878543.

4) Welche Zahl gehört dem Logarithmen 0,9743285 — 5 an?

Da die nächst kleinere Mantisse der Tafeln = 3,9743274 ist, wozu die Ziffer 9426 gehören, so braucht man, da sich die Kennziffer — 5 schon auf Hunderttausendtel bezieht, die Zahl nicht in sieben Ziffern zu suchen, da sie = 0,00009426 ist.

§. 3.

Uebungs-Fragen.

I. Wie verfährt man, um die, einem gegebenen Logarithmen zugehörige Zahl zu finden? Welche vierzifferige Zahlen gehören zu folgenden Logarithmen: 0,3427528; 1,7238249; 2,7832546; 0,5746837 — 1; 0,3874523 — 2; 0,6832545 — 3; 0,9834215 — 4? (§. 1.).

II. Wie findet man die, einem gegebenen Logarithmen angehörige Zahl in 5, 6 oder 7 Ziffern? Welche 7zifferige Zahlen gehören zu folgenden Log.: 3,8476251; 2,6298743; 1,7268547; 0,3876129; 0,3245612 — 1; 0,2511414 — 2; 0,7698423 — 3; 0,3846251 — 4; 0,2463745 — 5; 0,6839245 — 10; 5,7263427; 4,7211263? Welche practische Regeln kann man zur Auflösung dieser Aufgaben anwenden? (§. 2.).

V. Lehrübung.

Einige Anwendungen von der Logarithmenrechnung.

§. 1.

Proportionalzahlen durch Hülfe der Logarithmen zu finden.

I. Wenn man durch Hülfe der Logarithmen geometrische Proportionalzahlen finden soll, so treten vorzüglich zwey Hauptfälle ein:

a) Zu drey gegebenen Zahlen die vierte fehlende Proportionalzahl zu finden, und

b) zu zwey gegebenen Zahlen eine mittlere geometrische Proportionalzahl zu finden.

II. Um jene Aufgabe aufzulösen, bemerke man, ob eines der äussern, oder eines der mittlern Glieder fehlt. Im ersten Falle wird von der Summe der Logarithmen der beyden mittlern Glieder der Logarithme des gegebenen äussern abgezogen und zur Differenz die angehörige Zahl gesucht, so ist diese das gesuchte Proportionalglied.

Fehlt aber eines der mittlern Glieder, so muß man die Logarithmen der äussern addiren, von der Summe den Logarithmen des mittlern subtrahiren und zur erhaltenen logarithmischen Differenz die gehörige Zahl suchen, welche das fehlende Glied ist.

Folgende Beyspiele erläutern dieses: Es sey $9367 : 4134 = 45 : x$, so ist Log. x = Log. 4134 + Log. 45 — Log. 9367, oder:

Log. 4134 = 3,6163705
Log. 45 = 1,6532125 folglich

die Summe = 5,2695830
Log. 9367 = 3,9762124, folglich

die Differenz = 1,2933706

wozu die Zahl 19,65 gehört, welche daher das fehlende Proportionalglied ist. Sollte die Bestimmung in Hunderttel nicht genau genug seyn, so ist es leicht, durch die nun bekannten Regeln noch drey folgende Bruchstellen zu finden. Es sey ferner:

$29 : x = 9843 : 76$, so wird Log. x = Log. 29 +

Log. 76 — Log. 9843, oder: Log. 29 = 1,4623980;
Log. 76 = 1,8808136 folglich

Die Summe = 3,3432116
Log. 9843 = 3,9927302, also

Log. x = 0,3504814 — 1

Da nun die nächst kleinere Mantisse der Tafeln = 3,3504419 ist, wozu die Zahl 2241 gehört, so ist x = 0,2241, wodurch diese Zahl für die meisten Fälle scharf genug bestimmt ist.

Die Richtigkeit dieser Auflösungen gründet sich auf die bekannte Eigenschaft der Logarithmen, wodurch die Multiplication der Zahlen in eine Subtraction ihrer Logarithmen verwandelt wird.

III. Um nun auch zu zwey gegebenen Zahlen eine mittlere geometrische Proportionalzahl zu finden, darf man nur die Logarithmen der gegebenen Zahlen zusammen addiren, ihre Summe halbiren und zu diesem neuen Logarithmus die angehörige Zahl suchen, so ist diese das zu findende mittlere Proportionalglied.

Es sey z. B. 9 : x = x : 95 so ist Log. x = $\frac{\text{Log. 9} + \text{Log. 95}}{2}$. Dieses gibt Folgendes:

Log. 9 = 0,9542425
Log. 95 = 1,9777236, folglich

2,9319661 wovon die Hälfte = 1,4659830 ist; wozu zunächst die Zahl 29,24 gehört, welche man, wenn es nöthig ist ebenfalls noch durch 3 fernere Bruchstellen genauer bestimmen kann.

Es sey ferner 16 : x = x : 0,00032, so wird

$\log. x = \frac{\log. 16 + \log. 0{,}00032}{2}$. Dies gibt

$\log. 16 = 1{,}2041200$ und

$\log. 0{,}00032 = 0{,}5051500 - 4$, folglich

$1{,}7092700 - 4$, davon die Hälfte $= 0{,}8546350 - 2$, wozu die Zahl 0,07155 gehört, welche ebenfalls noch in drey folgenden Bruchstellen gefunden werden könnte.

§. 2.

Wurzelausziehungen durch Hülfe der Logarithmen.

I. Um aus irgend einer Zahl die Wurzel eines bestimmten Grades durch Hülfe der Logarithmen zu finden, suche man vor Allem den Logarithmen dieser Zahl, dividire ihn durch den Grad der auszuziehenden Wurzel und suche die dem Quotienten zugehörige Zahl.

Die Richtigkeit dieser Vorschrift bedarf keines fernern Beweises, da sie in den früher bewiesenen Eigenschaften der Logarithmen begründet ist. Zur Erläuterung dienen folgende Beyspiele:

1) Was ist $\sqrt{5154}$?

Hier ist $\log. 5154 = 3{,}7121444$. Halbirt man diesen Logarithmen, so erhält man 1,8565722 wozu die Zahl 71,87 gehört. Daher ist $\sqrt{5154} = 71{,}87$, wozu man die folgenden drey Bruchstellen ebenfalls leicht finden kann.

2) Was ist $\sqrt{718}$?

Hier ist $\log. 718 = 2{,}8561244$, folglich dessen Hälfte $= 1{,}4280622$ wozu die Zahl 26,79552 gehört.

3) Was ist $\sqrt[3]{3318}$?

Hier ist Log. 3318 = 3,5208764, folglich dessen Drittheil = 1,1736254 wozu die Zahl 14,91 gehört, welche ebenfalls durch die noch zu findenden folgenden drey Bruchstellen näher bestimmt werden kann, wenn es der Zweck der Rechnung erfodert.

II. Zur fernern Uebung mögen folgende Beyspiele (aus Meier Hirsch's Sammlung) nachgerechnet werden:

1) $\sqrt[4]{35246} = 13{,}70179\ldots$

2) $\sqrt[12]{567348} = 3{,}016389\ldots$

3) $\sqrt[6]{235{,}78} = 2{,}485522\ldots$

4) $\sqrt[5]{\frac{13}{16}} = 0{,}959322\ldots$

5) $\sqrt[7]{\frac{1171}{345}} = 1{,}190747\ldots$

6) $\sqrt[3]{17705\frac{2}{9}} = 26{,}06356\ldots$

7) $\sqrt[3]{172\frac{5}{6}} = 1{,}904159\ldots$

8) $\sqrt[13]{\frac{3348}{569}} = 1{,}146055\ldots$

9) $\left(\frac{9}{8}\right)^{21} = 11{,}86322\ldots$

10) $\left(2\frac{5}{6}\right)^{9} = 11767{,}35\ldots$

11) $\left(\frac{643}{637}\right)^{123} = 3{,}168104\ldots$

12) $\left(\frac{167}{53}\right)^{0{,}32} = 1{,}443779\ldots$

13) $\left(\frac{5}{7}\right)^{0,0537} = 0,982093 \ldots$

14) $\frac{(991,767)^5 + 12,34}{(20,358 + 10,1575)^6} = 151,4369 \ldots$

15) $\frac{(52072)^{13} + \sqrt{(0,000734)^9}}{2556082} = 8930,834 \ldots$

16) $\frac{(42666)^{12}}{1147} + \frac{(765)^{10}}{19432} = 62756,88 \ldots$

17) $\sqrt[5]{\left(\frac{7}{3}\sqrt[4]{6}\right)} = 1,295695 \ldots$

18) $\sqrt[3]{\left(0,26 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right)} = 0,596544 \ldots$

19) $\sqrt[5]{\frac{3425\sqrt[7]{136}}{0,00034}} = 28,94639 \ldots$

20) $253\sqrt[3]{\frac{716,5}{\sqrt{2}}} = 2016,914 \ldots$

21) $\sqrt[4]{\frac{132 + (7,356)^9}{\sqrt{(3,25)^5}}} = 144,5972 \ldots$

22) $\frac{\sqrt[7]{(466874)^6} + \sqrt[9]{(3576)^{16}}}{996003 + \sqrt{0,0071}} = 1788845, \ldots$

23) $\sqrt[8]{(21 \times \sqrt[6]{19})} = 1,476875 \ldots$

24) $\sqrt[3]{(5,03 + \sqrt[5]{0,2})} = 1,792020 \ldots$

25) $\sqrt[5]{(9,921 - 3\sqrt{5,02})} = 1,261866 \ldots$

26) $\frac{\sqrt[16]{43} + 5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}} = 1,264848 \ldots$

§. 3.

Übungs-Fragen.

I. Wie findet man durch Hülfe der Logarithmen zu 3 gegebenen Zahlen das 4te fehlende Proportionalglied? Auflösung folgender Beyspiele: $8749 : 134. = 29 : x$; $0{,}624 : 0{,}5 = 0{,}3 : x$; $\sqrt[3]{69} : \sqrt{7} = \sqrt{15} : x$; $0{,}04^3 : 0{,}0006^3 = \frac{7}{12} : x$ u. s. w. Wie findet man zu zwey gegebenen äussern Gliedern die mittlere arithmetische Proportionalzahl durch Logarithmen? Auflösung folgender Aufgaben: $0{,}384 : x = x : \left(\frac{17}{25}\right)^3$; oder $\sqrt{0{,}8463} : x = x : \sqrt[5]{\frac{7}{11}}$ u. s. w. (§. 1.)

II. Wie wird durch Hülfe der Logarithmen die Wurzel eines beliebigen Grades aus jeder gegebenen Zahl gefunden? Auflösung folgender Fragen: $\sqrt{336}$; $\sqrt[3]{75}$; $\sqrt[3]{8794}$; $\sqrt[4]{83}$; $\sqrt[6]{15}$; $\sqrt[8]{0{,}6}$; $\sqrt[5]{0{,}084}$; $\sqrt[10]{4{,}23}$; $\sqrt[5]{\frac{117}{329}}$; $\sqrt[6]{12\frac{4}{7}}$; $\sqrt[3]{\frac{0{,}73}{0{,}854}}$; $\sqrt[5]{0{,}0354 + \frac{8}{11}}$; $\sqrt[10]{38\frac{5}{9}}$; $\sqrt[6]{\left(\frac{5}{7}\right)^3}$; $\sqrt[8]{13\frac{2}{3}}$ u. s. f. (§. 2.)

Tafel
der
Logarithmen
für
alle ganze Zahlen
von
1 bis 10,000 in sieben Decimal-Bruchstellen.

z	0.	100.	200.	300.
0	*	2.0000000	2.3010300	2.4771213
1	0.0000000	2.0043214	2.3031961	2.4785665
2	3010300	086002	053514	800069
3	4771213	128372	074960	814426
4	6020600	170333	096302	828736
5	6989700	211893	117539	842998
6	7781513	253059	138672	857214
7	8450980	293838	159703	871384
8	9030900	334238	180633	885507
9	9542425	374265	201463	899585
10	1.0000000	413927	222193	913617
11	0413927	453230	242825	927604
12	0791812	492180	263359	941546
13	1.1139434	530784	283796	955443
14	1461280	569049	304138	969296
15	1760913	606978	324385	983106
16	1.2041200	644580	344538	996871
17	2304489	681859	364597	2.5010593
18	2552725	718820	384565	024271
19	2787536	755470	404441	037907
20	1.3010300	791812	424227	051500
21	3222193	827854	443923	065050
22	3424227	863598	463530	078559
23	3617278	899051	483049	092025
24	3802112	934217	502480	105450
25	3979400	969100	521825	118834
26	1.4149733	2.1003705	541084	132176
27	4313638	038037	560259	145478
28	4471580	072100	579348	158738
29	4623980	105897	598355	171959
30	4771213	139434	617278	185139
31	4913617	172713	636120	198280
32	1.5051500	205739	654880	211381
33	5185139	238516	673559	224442

z	0.	100.	200.	300.
34	1 . 5314789	2 . 1271048	2 . 3692159	2 . 5237465
35	440680	303338	710679	250448
36	563025	335389	729120	263393
37	682017	367206	747483	276299
38	797836	398791	765770	289167
39	910646	430148	783979	301997
40	1 . 6020600	461280	802112	314789
41	127839	492191	820170	327544
42	232493	522883	838154	340261
43	334685	553360	856063	352941
44	434527	583625	873898	365584
45	532125	613680	891661	378191
46	627578	643529	909351	390761
47	720979	673173	926970	403295
48	812412	702617	944517	415792
49	901961	731863	961993	428254
50	989700	760913	979400	440680
51	1 . 7075702	789769	996737	453071
52	160033	818436	2 . 4014005	465427
53	242759	846914	031205	477747
54	323938	875207	048337	490033
55	403627	903317	065402	502284
56	481880	931246	082400	514500
57	558749	958997	099331	526682
58	634280	986571	116197	538830
59	708520	2 . 2013971	132998	550944
60	781513	041200	149733	563025
61	853298	068259	166405	575072
62	923917	095150	183013	587086
63	993405	121876	199557	599066
64	1 . 8061800	148438	216039	611014
65	129134	174839	232459	622929
66	195439	201081	248816	634811

z	0.	100.	200.	300.
67	1 . 8260748	2 . 2227165	2 . 4265113	2 . 5646661
68	325089	53093	81348	58478
69	388491	78867	97523	70264
70	450980	2 . 2304489	2 . 4313638	82017
71	512583	29961	29693	93739
72	573325	55284	45689	2 . 5705429
73	633229	80461	61626	17088
74	692317	2 . 2405492	77506	28716
75	750613	30380	93327	40313
76	808136	55127	2 . 4409091	51878
77	864907	79733	24798	63414
78	920946	2 . 2504200	40448	74918
79	976271	28530	56042	86392
80	1 . 9030900	52725	71580	97836
81	084850	76786	87063	2 . 5809250
82	138139	2 . 2600714	2 . 4502491	20634
83	190781	24511	17864	31988
84	242793	48178	33183	43312
85	294189	71717	48449	54607
86	344985	95129	63660	65873
87	395193	2 . 2718416	78819	77110
88	444827	41578	93925	88317
89	493900	64618	2 . 4608978	99496
90	542425	87536	23980	2 . 5910646
91	590414	2 . 2810334	38930	21768
92	637878	33012	53829	32861
93	684829	55573	68676	43926
94	731279	78017	83473	54962
95	777236	2 . 2900346	98220	65971
96	822712	22561	2 . 4712917	76952
97	867717	44662	27564	87905
98	912261	66652	42163	98831
99	956352	88531	56712	2 . 6009729
100	2 . 0000000	2 . 3010300	71213	20600

z	400.	500.	600.	700.	800.	900.
	2,6	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9
0	020600	989700	781513	450980	030900	542425
1	31444	98377	88745	57180	36325	47248
	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	2,9
2	42261	007037	95965	63371	41744	52065
3	53050	15680	803173	69553	47155	56878
4	63814	24305	10369	75727	52560	61684
5	74550	32914	17554	81891	57959	66486
6	85260	41505	24726	88047	63350	71282
7	95944	50080	31887	94194	68735	76073
8	106602	58637	39036	500333	74114	80858
9	17233	67178	46173	06462	79485	85639
10	27839	75702	53298	12583	84850	90414
11	38418	84209	60412	18696	90209	95184
12	48972	92700	67514	24800	95560	99948
13	59501	101174	74605	30895	100905	604708
14	70003	09631	81684	36982	06244	09462
15	80481	18072	88751	43060	11576	14211
16	90933	26497	95807	49130	16902	18955
17	201361	34905	902852	55192	22221	23693
18	11763	43298	09885	61244	27533	28427
19	22140	51674	16906	67289	32839	33155
20	32493	60033	23917	73325	38139	37878
21	42821	68377	30916	79353	43432	42596
22	53125	76705	37904	85372	48718	47309
23	63404	85017	44880	91383	53998	52017
24	73659	93313	51846	97386	59272	56720
25	83889	201593	58800	603380	64539	61417
26	94096	09857	65743	09366	69800	66110
27	304279	18106	72675	15344	75055	70797
28	14438	26339	79596	21314	80303	75480
29	24573	34557	86506	27275	85545	80157
30	34685	42759	93405	33229	90781	84829
	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9
31	44773	50945	000294	39174	96010	89497
32	54837	59116	07171	45111	201233	94159
33	64879	67272	14037	51040	06450	98816

z	400.	500.	600.	700.	800.	900.
	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9
34	374897	275413	020893	656961	211661	703469
35	84893	83538	27737	62873	16865	08116
36	94865	91648	34571	68778	22063	12758
37	404814	99743	41394	74675	27255	17396
38	14741	307823	48207	80564	32440	22028
39	24645	15888	55009	86444	37620	26656
40	34527	23938	61800	92317	42793	31279
41	44386	31973	68580	98182	47960	35896
42	54223	39993	75350	704039	53121	40509
43	64037	47998	82110	09888	58276	45117
44	73830	55989	88859	15729	63424	49720
45	83600	63965	95597	21563	68567	54318
46	93349	71926	102325	27388	73704	58911
47	503075	79873	09043	33206	78834	63500
48	12780	87806	15750	39016	83959	68083
49	22463	95723	22447	44818	89077	72662
50	32125	403627	29134	50613	94189	77236
51	41765	11516	35810	56399	99296	81805
52	51384	19391	42476	62178	304396	86369
53	60982	27251	49132	67950	09490	90929
54	70559	35098	55777	73713	14579	95484
55	80114	42930	62413	79470	19661	800034
56	89648	50748	69038	85218	24738	04579
57	99162	58552	75654	90959	29808	09119
58	608655	66342	82259	96692	34873	13655
59	18127	74118	88854	802418	39932	18186
60	27578	81880	95439	08136	44985	22712
61	37009	89629	202015	13847	50032	27234
62	46420	97363	08580	19550	55073	31751
63	55810	505084	15135	25245	60108	36263
64	65180	12791	21681	30934	65137	40770
65	74530	20484	28216	36614	70161	45273
66	83859	28164	34742	42288	75179	49771

z	400.	500.	600.	700.	800.	900.
	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9
67	693169	535831	241258	847954	380191	854265
68	702459	43483	47765	53612	85197	58754
69	11728	51123	54261	59263	90198	63238
70	20979	58749	60748	64907	95193	67717
71	30209	66361	67225	70544	400181	72192
72	39420	73960	73693	76173	05165	76663
73	48611	81546	80151	81795	10142	81128
74	57783	89119	86599	87410	15114	85590
75	66936	96678	93038	93017	20081	90046
76	76070	604225	99467	98617	25041	94498
77	85184	11758	305887	904210	29996	98946
78	94279	19278	12297	09796	34945	903389
79	803355	26786	18698	15375	39889	07827
80	12412	34280	25089	20946	44827	12261
81	21451	41761	31471	26510	49759	16690
82	30470	49230	37844	32068	54686	21115
83	39471	56686	44207	37618	59607	25535
84	48454	64128	50561	43161	64523	29951
85	57417	71559	56906	48697	69433	34362
86	66363	78976	63241	54225	74337	38769
87	75290	86381	69567	59747	79236	43172
88	84198	93773	75884	65262	84130	47569
89	93089	701153	82192	70770	89018	51963
90	901961	08520	88491	76271	93900	56352
91	10815	15875	94780	81765	98777	60737
92	19651	23217	401061	87252	503649	65117
93	28469	30547	07332	92732	08515	69492
94	37269	37864	13595	98205	13375	73864
	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9	2,9
95	46052	45170	19848	003671	18230	78231
96	54817	52463	26092	09131	23080	82593
97	63564	59743	32328	14583	27924	86952
98	72293	67012	38554	20029	32763	91305
99	81005	74268	44772	25468	37597	95655

z	1000.	1100.	1200.	1300.	1400.	1500.
	3,0	3,0	3,0	3,1	3,1	3,1
0	000000	413927	791812	139434	461280	760913
1	04341	17873	95430	42773	64381	63807
2	08677	21816	99045	46110	67480	66699
3	13009	25755	802656	49444	70577	69590
4	17337	29691	06265	52776	73671	72478
5	21661	33623	09870	56105	76763	75365
6	25980	37551	13473	59432	79853	78250
7	30295	41476	17073	62756	82941	81133
8	34605	45398	20669	66077	86027	84013
9	38912	49315	24263	69396	89110	86892
10	43214	53230	27854	72713	92191	89769
11	47512	57141	31441	76027	95270	92645
12	51805	61048	35026	79338	98347	95518
13	56094	64952	38608	82647	501422	98389
14	60380	68852	42187	85954	04494	801259
15	64660	72749	45763	89258	07564	04126
16	68937	76642	49336	92559	10633	06992
17	73210	80532	52906	95858	13699	09856
18	77478	84418	56473	99154	16762	12718
19	81742	88301	60037	202448	19824	15578
20	86002	92180	63598	05739	22883	18436
21	90257	96056	67157	09028	25941	21292
22	94509	99929	70712	12315	28996	24147
23	98756	503798	74265	15598	32049	26999
24	103000	07663	77814	18880	35100	29850
25	07239	11525	81361	22159	38149	32698
26	11474	15384	84905	25435	41195	35545
27	15704	19239	88446	28709	44240	38390
28	19931	23091	91984	31981	47282	41234
29	24154	26939	95519	35250	50322	44075
30	28372	30784	99051	38516	53360	46914
31	32587	34626	902581	41781	56396	49752
32	36797	38464	06107	45042	59430	52588
33	41003	42299	09631	48301	62462	55422

z	1000.	1100.	1200.	1300.	1400.	1500.
	3,0	3,0	3,0	3,1	3,1	3,1
34	145205	546131	913152	251558	565492	858254
35	49403	49959	16670	54813	68519	61084
36	53598	53783	20185	58065	71544	63912
37	57788	57605	23697	61314	74568	66739
38	61974	61423	27206	64561	77589	69563
39	66155	65237	30713	67806	80608	72386
40	70333	69049	34217	71048	83625	75207
41	74507	72856	37718	74288	86640	78026
42	78677	76661	41216	77525	89653	80844
43	82843	80462	44711	80760	92663	83659
44	87005	84260	48204	83993	95672	86473
45	91163	88055	51694	87223	98678	89285
46	95317	91846	55180	90451	601683	92095
47	99467	95634	58665	93676	04685	94903
48	203613	99419	62146	96899	07686	97710
49	07755	603200	65624	300119	10684	900514
50	11893	06978	69100	03338	13680	03317
51	16027	10753	72573	06553	16674	06118
52	20157	14525	76043	09767	19666	08917
53	24284	18293	79511	12978	22656	11715
54	28406	22058	82975	16187	25644	14510
55	32525	25820	86437	19393	28630	17304
56	36639	29578	89896	22597	31614	20096
57	40750	33334	93353	25798	34596	22886
58	44857	37086	96806	28998	37575	25675
	3,0	3,0	3,1	3,1	3,1	3,1
59	48960	40834	000257	32195	40553	28461
60	53059	44580	03705	35389	43529	31246
61	57154	48322	07151	38581	46502	34029
62	61245	52061	10594	41771	49474	36810
63	65333	55797	14034	44959	52443	39590
64	69416	59530	17471	48144	55411	42367
65	73496	63259	20905	51327	58376	45143
66	77572	66986	24337	54507	61340	47918

z	1000.	1100.	1200.	1300.	1400.	1500.
	3,0	3,0	3,1	3,1	3,1	3,1
67	281644	670709	027766	357685	664301	950690
68	85713	74428	31193	60861	67261	53461
69	89777	78145	34616	64034	70218	56229
70	93838	81859	38037	67206	73173	58997
71	97895	85569	41456	70375	76127	61762
72	301948	89276	44871	73541	79078	64525
73	05997	92980	48284	76705	82027	67287
74	10043	96681	51694	79867	84975	70047
75	14085	700379	55102	83027	87920	72806
76	18123	04073	58507	86184	90864	75562
77	22157	07765	61909	89339	93805	78317
78	26188	11453	65309	92492	96744	81070
79	30214	15138	68705	95643	99682	83821
80	34238	18820	72100	98791	702617	86571
81	38257	22499	75491	401937	05551	89319
82	42273	26175	78880	05080	08482	92065
83	46285	29847	82267	08222	11412	94809
84	50293	33517	85650	11361	14339	97552
	3,0	3,0	3,1	3,1	3,1	3,2
85	54297	37184	89031	14498	17265	000293
86	58298	40847	92410	17632	20188	03032
87	62295	44507	95785	20765	23110	05769
88	66289	48164	99159	23895	26029	08505
89	70279	51819	102529	27022	28947	11239
90	74265	55470	05897	30148	31863	13971
91	78248	59118	09262	33271	34776	16702
92	82226	62763	12625	36392	37688	19431
93	86202	66404	15985	39511	40598	22158
94	90173	70043	19343	42628	43506	24883
95	94141	73679	22698	45742	46412	27607
96	98106	77312	26050	48854	49316	30329
97	402066	80942	29400	51964	52218	33049
98	06023	84568	32747	55072	55118	35768
99	09977	88192	36092	58177	58016	38485
100	13927	91812	39434	61280	60913	41200

z	1600.	1700.	1800.	1900.	2000.	2100.
	3,2	3,2	3,2	3,2	3,3	3,3
0	041200	304489	552725	787536	010300	222193
1	43913	07043	55137	89821	12471	24261
2	46625	09596	57548	92105	14641	26327
3	49335	12146	59957	94388	16809	28393
4	52044	14696	62365	96669	18977	30457
5	54750	17244	64772	98950	21144	32521
6	57455	19790	67177	801229	23309	34584
7	60159	22335	69582	03507	25474	36645
8	62860	24879	71984	05784	27637	38706
9	65560	27421	74386	08059	29799	40766
10	68259	29961	76786	10334	31961	42825
11	70955	32500	79185	12607	34121	44882
12	73650	35038	81582	14879	36280	46939
13	76344	37574	83978	17150	38438	48995
14	79035	40108	86373	19419	40595	51050
15	81725	42641	88766	21688	42751	53104
16	84414	45173	91158	23955	44905	55157
17	87100	47703	93549	26221	47059	57209
18	89785	50232	95939	28486	49212	59260
19	92468	52759	98327	30750	51363	61310
20	95150	55284	600714	33012	53514	63359
21	97830	57809	03099	35274	55663	65407
22	100508	60331	05484	37534	57812	67454
23	03185	62853	07867	39793	59959	69500
24	05860	65373	10248	42051	62105	71545
25	08534	67891	12629	44307	64250	73589
26	11205	70408	15008	46563	66394	75633
27	13876	72923	17385	48817	68537	77675
28	16544	75437	19762	51070	70680	79716
29	19211	77950	22137	53322	72820	81757
30	21876	80461	24511	55573	74960	83796
31	24540	82971	26883	57823	77099	85834
32	27202	85479	29255	60071	79237	87872
33	29862	87986	31625	62318	81374	89909

z	1600.	1700.	1800.	1900.	2000.	2100.
	3,2	3,2	3,2	3,2	3,3	3,3
34	132521	390491	633993	864565	083509	291944
35	35178	92995	36361	66810	85644	93979
36	77833	95497	38727	69054	87778	96012
37	40487	97998	41092	71296	89910	98045
38	43139	400498	43455	73538	92042	300077
39	45790	02996	45817	75778	94172	02108
40	48438	05492	48178	78017	96302	04138
41	51086	07988	50538	80255	98430	06167
42	53732	10482	52896	82492	100557	08195
43	56376	12974	55253	84728	02684	10222
44	59018	15465	57609	86963	04809	12248
45	61659	17954	59964	89196	06933	14273
46	64298	20442	62317	91428	09056	16297
47	66936	22929	64669	93660	11178	18320
48	69572	25414	67020	95890	13100	20343
49	72207	27898	69369	98118	15420	22364
50	74839	30380	71717	900346	17539	24385
51	77471	32861	74064	02573	19657	26404
52	80100	35341	76410	04798	21774	28423
53	82729	37819	78754	07022	23889	30440
54	85355	40296	81097	09246	26004	32457
55	87980	42771	83439	11468	28118	34473
56	90603	45245	85780	13689	30231	36488
57	93225	47718	88119	15908	32343	38501
58	95845	50189	90457	18127	34454	40514
59	98464	52658	92794	20344	36563	42526
60	201081	55127	95129	22561	38672	44538
61	03696	57594	97464	24776	40780	46548
62	06310	60059	99797	26990	42887	48557
63	08922	62523	702129	29203	44992	50565
64	11533	64986	04459	31415	47097	52573
65	14142	67447	06788	33626	49201	54579
66	16750	69907	09116	35835	51303	56585

z	1600.	1700.	1800.	1900.	2000.	2100.
	3,2	3,2	3,2	3,2	3,3	3,3
67	219356	472365	711443	938044	153405	358589
68	21960	74823	13769	40251	55505	60593
69	24563	77278	16093	42457	57605	62596
70	27165	79733	18416	44662	59703	64597
71	29764	82186	20738	46866	61801	66598
72	32363	84637	23058	49069	63898	68598
73	34959	87087	25378	51271	65993	70597
74	37555	89536	27696	53471	68088	72595
75	40148	91984	30013	55671	70181	74593
76	42740	94430	32328	57869	72273	76589
77	45331	96874	34643	60067	74365	78584
78	47920	99318	36956	62263	76455	80579
79	50507	501759	39268	64458	78545	82572
80	53093	04200	41578	66652	80633	84565
81	55677	06639	43888	68845	82721	86557
82	58260	09077	46196	71037	84807	88547
83	60841	11513	48503	73227	86893	90537
84	63421	13949	50809	75417	88977	92526
85	65999	16382	53114	77605	91061	94114
86	68576	18815	55417	79792	93143	96502
87	71151	21246	57719	81979	95224	98488
88	73724	23675	60020	84164	97305	400473
89	76296	26103	62320	86348	99384	02458
90	78867	28530	64618	88531	201463	04441
91	81436	30956	66915	90713	03540	06424
92	84004	33380	69211	92893	05617	08405
93	86570	35803	71506	95073	07692	10386
94	89134	38224	73800	97252	09767	12366
95	91697	40645	76092	99429	11840	14345
96	94258	43063	78383	001605	13913	16323
97	96818	45481	80673	03781	15984	18301
98	99377	47897	82962	05955	18055	20277
99	301934	50312	85250	08128	20124	22252

z	2200.	2300.	2400.	2500.	2600.	2700.
	3,3	3,3	3,3	3,3	3,4	3,4
0	424227	617278	802112	979400	149733	313638
1	26200	19166	03922	81137	51404	56246
2	28173	21053	05730	82873	53073	16853
3	30145	22939	07538	84608	54742	18460
4	32116	24825	09345	86343	56410	20067
5	34086	26709	11151	88077	58077	21673
6	36055	28593	12956	89811	59744	23278
7	38023	30476	14761	91543	61410	24883
8	39991	32358	16565	93275	63076	26487
9	41957	34239	18368	95007	64741	28090
10	43923	36120	20170	96737	66405	29693
11	45887	37999	21972	98467	68069	31295
	3,3	3,3	3,3	3,4	3,4	3,4
12	47851	39878	23773	000196	69732	32897
13	49814	41756	25573	01925	71394	34498
14	51776	43634	27373	03653	73056	36098
15	53737	45510	29171	05380	74717	37698
16	55698	47386	30969	07106	76377	39298
17	57657	49260	32767	08832	78037	40896
18	59615	51134	34563	10557	79696	42495
19	61573	53007	36359	12282	81355	44092
20	63530	54880	38154	14005	83013	45689
21	65486	56751	39948	15728	84670	47285
22	67441	58622	41741	17451	86327	48881
23	69395	60492	43534	19173	87983	50476
24	71348	62361	45326	20894	89638	52071
25	73300	64230	47117	22614	91293	53665
26	75252	66097	48908	24333	92947	55259
27	77202	67964	50698	26052	94601	56851
28	79152	69830	52487	27771	96254	58444
29	81101	71695	54275	29488	97906	60035
30	83049	73559	56063	31205	99557	61626
31	84996	75423	57850	32921	201208	63217
32	86942	77285	59636	34637	02859	64807
33	88887	79147	61421	36352	04509	66396

z	2200.	2300.	2400.	2500.	2600.	2700.
	3,3	3,3	3,3	3,4	3,4	3,4
34	490832	681009	863206	038066	206158	367985
35	92775	82869	64990	39780	07806	69573
36	94718	84728	66773	41492	09454	71161
37	96660	86587	68555	43205	11101	72748
38	98601	88445	70337	44916	12748	74334
39	500541	90302	72118	46627	14394	75920
40	02480	92159	73898	48337	16039	77506
41	04419	94014	75678	50047	17684	79090
42	06356	95869	77457	51755	19328	80675
43	08293	97723	79235	53464	20972	82258
44	10229	99576	81012	55171	22615	83841
45	12163	701428	82789	56878	24257	85423
46	14098	03280	84565	58584	25898	87005
47	16031	05131	86340	60289	27539	88587
48	17963	06981	88114	61994	29180	90167
49	19895	08830	89888	63698	30820	91747
50	21825	10679	91661	65402	32459	93327
51	23755	12526	93433	67105	34097	94906
52	25684	14373	95205	68807	35735	96484
53	27612	16219	86975	70508	37372	98062
54	29539	18065	98746	72209	39009	99639
55	31465	19909	900515	73909	40645	401216
56	33391	21753	02284	75608	42281	02792
57	35316	23596	04052	77307	43916	04368
58	37239	25438	05819	79005	45550	05943
59	39162	27279	07585	80703	47183	07517
60	41084	29120	09351	82400	48816	09091
61	43006	30960	11116	84096	50449	10664
62	44926	32799	12880	85791	52081	12237
63	46846	34637	14644	87486	53712	13809
64	48764	36475	16407	89180	55342	15380
65	50682	38311	18169	90874	56972	16951
66	52599	40147	19931	92567	58601	18522

z	2200.	2300.	2400.	2500.	2600.	2700.
	3,3	3,3	3,3	3,4	3,4	3,4
67	554515	741983	921691	094259	260230	420092
68	56431	43817	23452	95950	61858	21661
69	58345	45651	25211	97641	63486	23230
70	60259	47483	26970	99331	65113	24798
71	62171	49316	28727	101021	66739	26365
72	64083	51147	30485	02710	68365	27932
73	65994	52977	32241	04398	69990	29499
74	67905	54807	33997	06085	71614	31065
75	69814	56636	35752	07772	73238	32630
76	71723	58464	37506	09459	74861	34195
77	73630	60292	39260	11144	76484	35759
78	75537	62119	41013	12829	78106	37322
79	77443	63944	42765	14513	79727	38885
80	79348	65770	44517	16197	81348	40448
81	81253	67594	46268	17880	82968	42010
82	83156	69418	48018	19562	84588	43571
83	85059	71240	49767	21244	86207	45132
84	86961	73063	51516	22925	87825	46692
85	88862	74884	53264	24605	89443	48252
86	90762	76704	55011	26285	91060	49811
87	92662	78524	56758	27964	92677	51370
88	94560	80343	58504	29643	94293	52928
89	96458	82161	60249	31321	95908	54485
90	98355	83979	61993	32998	97523	56042
91	600251	85796	63737	34674	99137	57598
92	02146	87612	65480	36350	300751	59154
93	04041	89427	67223	38025	02364	60709
94	05934	91241	68964	39700	03976	62264
95	07827	93055	70705	41374	05588	63818
96	09719	94868	72446	43047	07199	65372
97	11610	96680	74185	44719	08809	66925
98	13500	98492	75924	46391	10419	68477
99	15390	800302	77662	48063	12029	70029

z	2800.	2900.	3000.	3100.	3200.	3300.
	3,4	3,4	3,4	3,4	3,5	3,5
0	471580	623980	771213	913617	051500	185139
1	73131	25477	72660	15018	52857	86455
2	74681	26974	74107	16418	54213	87771
3	76231	28470	75553	17818	55569	89086
4	77780	29966	76999	19217	56925	90400
5	79329	31461	78445	20616	58280	91715
6	80877	32956	79890	22015	59635	93028
7	82424	34450	81334	23413	60990	94342
8	83971	35944	82778	24810	62344	95655
9	85517	37437	84222	26207	63697	96968
10	87068	38930	85665	27604	65050	98280
11	88608	40422	87108	29000	66043	99592
12	90153	41914	88550	30396	67755	200903
13	91697	43405	89991	31791	69107	02214
14	93241	44895	91432	33186	70459	03525
15	94784	46386	92873	34581	71810	04835
16	96327	47875	94313	35974	73160	06145
17	97868	49364	95753	37368	74511	07455
18	99410	50853	97192	38761	75860	08764
19	500951	52341	98631	40154	77210	10073
20	02491	53829	800069	41546	78559	11381
21	04031	55316	01507	42938	79907	12689
22	05570	56802	02945	44329	81255	13996
23	07109	58288	04381	45720	82603	15303
24	08647	59774	05818	47110	83950	16610
25	10185	61259	07254	48500	85297	17916
26	11722	62743	08689	49890	86644	19222
27	13258	64227	10124	51279	87990	20528
28	14794	65711	11559	52667	89335	21833
29	16329	67194	12993	54056	90080	23138
30	17864	68676	14426	55443	92025	24442
31	19399	70158	15859	56831	93370	25746
32	20932	71640	17292	58218	94713	27050
33	22466	73121	18724	59604	96057	28353

z	2800.	2900.	3000.	3100.	3200.	3300.
	3,4	3,4	3,4	3,4	3,5	3,5
34	523998	674601	820156	960990	097400	229656
35	25531	76081	21587	62375	98743	30958
36	27062	77561	23018	63761	100085	32260
37	28593	79039	24448	65145	01427	33562
38	30124	80518	25878	66529	02768	34863
39	31654	81996	27307	67913	04109	36164
40	33183	83473	28736	69296	05450	37465
41	34712	84950	30164	70679	61790	38765
42	36241	86427	31592	72062	08130	40064
43	37769	87903	33020	73444	09469	41364
44	39296	89378	34446	74825	10808	42663
45	40823	90853	35873	76206	12147	43961
46	42349	92327	37299	77587	13485	45259
47	43875	93801	38725	78967	14823	46557
48	45400	95275	40150	80347	16160	47854
49	46924	96748	41574	81727	17497	49151
50	48449	98220	42998	83106	18834	50448
51	49972	99692	44422	84484	20170	51744
52	51495	701164	45845	85862	21505	53040
53	53018	02634	47268	87240	22841	54336
54	54540	04105	48690	88617	24175	55631
55	56061	05575	50112	89994	25510	56925
56	57582	07044	51533	91370	26844	58220
57	59102	08513	52954	92746	28178	59513
58	60622	09982	54375	94121	29511	60807
59	62142	11450	55795	95496	30844	62100
60	63660	12917	57214	96871	32176	63393
61	65179	14384	58633	98245	33508	64685
62	66696	15851	60052	99619	34840	65977
	3,4	3,4	3,4	3,5	3,5	3,5
63	68213	17317	61470	000992	36171	67269
64	69730	18782	62888	02365	37502	68560
65	71246	20247	64305	03737	38832	69851
66	72762	21711	65722	05109	40162	71141

z	2800.	2900.	3000.	3100.	3200.	2300.
	3,4	3,4	3,4	3,5	3,5	3,5
67	574277	723175	867138	006481	141491	272431
68	75791	24639	68554	07852	42820	73721
69	78305	26102	69969	09222	44149	75010
70	78819	27564	71384	10593	45478	76299
71	80332	29027	72798	11962	46805	77588
72	81844	30488	74212	13332	48133	78876
73	83356	31949	75626	14701	49460	80163
74	48867	33410	77039	16069	50787	81451
75	86378	34870	78451	17437	52113	82738
76	87889	36329	79863	18805	53439	84024
77	89399	37788	81275	20172	54764	85311
78	90908	39247	82686	21539	56089	86596
79	92417	40705	84097	22905	57414	87882
80	93925	42163	85507	24271	58738	89167
81	95433	43620	86917	25637	60062	90452
82	96940	45076	88326	27002	61386	91736
83	98446	46533	89735	28366	62709	93020
84	99953	47988	91144	29731	64031	94304
85	01458	49443	92552	31094	65354	95587
86	02963	50898	93959	32458	66676	96870
87	04468	52352	95366	33821	67997	98152
88	05972	53806	96773	35183	69318	99434
89	07475	55259	98179	36545	70639	300716
90	08978	56712	99585	37907	71959	01997
91	10481	58164	900990	39268	73279	03278
92	11983	59616	02395	40629	74598	04558
93	13484	61067	03799	41989	75917	05839
94	14985	62518	05203	43349	77236	07118
95	16486	63968	06607	44709	78554	08398
96	17986	65418	08010	46068	79872	09677
97	19485	66867	09412	47426	81189	10955
98	20984	68316	10814	48785	82507	12234
99	22482	69765	12216	50142	83823	13512

z	3400.	3500.	3600.	3700.	3800.	3900.
	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
0	314789	440680	563025	682017	797836	910646
1	16066	41921	64231	83191	98979	11760
2	17343	43161	65437	84364	800121	12873
3	18619	44401	66643	85537	01263	13986
4	19896	45641	67848	86710	02405	15098
5	21171	46880	69053	87882	03547	16210
6	22446	48119	70257	89054	04688	17322
7	23721	49358	71461	90226	05829	18434
8	24996	50596	72665	91397	06969	19546
9	26270	51834	73869	92568	08110	20657
10	27544	53071	75072	93739	09250	21768
11	28817	54308	76275	94910	10389	22878
12	30090	55545	77477	96080	11529	23988
13	31363	56781	78680	97249	12668	25098
14	32635	58018	79881	98419	13807	26208
15	33907	59253	81083	99588	14945	27318
16	35179	60489	82284	700757	16084	28427
17	36450	61724	83485	01926	17222	29536
18	37721	62958	84686	03094	18359	30644
19	38991	64193	85886	04262	19497	31753
20	40261	65427	87086	05429	20634	32861
21	41531	66660	88285	06597	21770	33968
22	42800	67894	89484	07764	22907	35076
23	44069	69126	90683	08930	24043	36183
24	45338	70359	91882	10097	25179	37290
25	46606	71591	93080	11263	26314	38397
26	47874	72823	94278	12429	27450	39503
27	49141	74055	95476	13594	28585	40609
28	50408	75286	96673	14759	29719	41715
29	51675	76517	97870	15924	30854	42820
30	52941	77747	99066	17083	31988	43926
31	54207	78977	600262	18252	33122	45030
32	55473	80207	01458	19416	34255	46135
33	56738	81436	02654	20580	35388	47239

z	3400.	3500.	3600.	3700.	3800.	3900.
	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
34	358003	482665	603849	721743	836521	948344
35	59267	83894	05044	22906	37654	49447
36	60532	85123	06239	24069	38786	50551
37	61795	86351	07433	25231	39918	51654
38	63059	87578	08627	26393	41050	52757
39	64322	88806	09821	27555	42181	53860
40	65584	90033	11014	28716	43312	54962
41	66847	91259	12207	29877	44443	56064
42	68109	92486	13399	31038	45574	57166
43	69370	93712	14592	32198	46704	58268
44	70631	94937	15784	33358	47834	59369
45	71892	96162	16975	34518	48963	60470
46	73153	97387	18167	35678	50093	61571
47	74413	98612	19358	36837	51222	62671
48	75673	99836	20548	37996	52351	63771
49	76932	501060	21739	39154	53479	64871
50	78191	02284	22929	40313	54607	65971
51	79450	03507	24118	41471	55735	67070
52	80708	04730	25308	42628	56863	68169
53	81966	05952	26497	43786	57990	69268
54	83223	07174	27685	44943	59117	70367
55	84481	08396	28874	46099	60244	71465
56	85737	09618	30062	47256	61370	72563
57	86994	10839	31250	48412	62496	73661
58	88250	12059	32437	49568	63622	74758
59	89506	13280	33624	50723	64748	75855
60	90761	14500	34811	51878	65873	76952
61	92016	15720	35997	53033	66998	78048
62	93271	16939	37183	54188	68123	79145
63	94525	18158	38369	55342	69247	80241
64	95779	19377	39555	56496	70371	81336
65	97032	20595	40740	57650	71495	82432
66	98286	21813	41925	58803	72618	83527

z	3400.	3500.	3600.	3700.	3800.	3900.
	3,5	3,5	3,5	3 , 5	3,5	3,5
67	399538	523031	643109	759956	873742	984622
68	400791	24248	44293	61109	74865	85717
69	02043	25465	45477	62261	75987	86811
70	03295	26682	46661	63414	77110	87905
71	04546	27899	47844	64565	78232	88999
72	05797	29115	49027	65717	79353	90092
73	07048	30330	50209	66868	80475	91186
74	08298	31545	51392	68019	81596	92279
75	09548	32760	52573	69170	82717	93371
76	10798	33975	53755	70320	83838	94464
77	12047	35189	54936	71470	84958	95556
78	13296	36403	56117	72620	86078	96648
79	14544	37617	57298	73769	87198	97739
80	15792	38830	58478	74918	88317	98831
81	17040	40043	59658	76067	89436	99922
	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,6
82	18288	41258	66838	77215	90555	001013
83	19535	42468	62017	78363	91674	02103
84	20781	43680	63196	79511	92792	03193
85	22028	44892	64375	80659	93910	04283
86	23274	46103	65553	81806	95028	05373
87	24519	47314	66731	82953	96145	06462
88	25765	48524	67909	84100	97262	07551
89	27010	49735	69087	85246	98379	08640
90	28254	50944	70264	86392	99496	09729
91	29498	52154	71440	87538	900612	10817
92	30742	53363	72617	88683	01728	11905
93	31986	54572	73793	89828	02844	12993
94	33229	55781	74969	90973	03959	14081
95	34472	56989	76144	92118	05075	15168
96	35714	58197	77320	93262	06189	16255
97	36956	59404	78495	94406	07304	17341
98	38198	60612	79669	95550	08418	18428
99	39439	61818	80843	96693	09532	19514

z	4000.	4100.	4200.	4300.	4400.	4500.
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
0	206000	127839	232493	334685	434527	532125
1	21686	28898	33527	35694	35514	33090
2	22771	29957	34560	36704	36500	34055
3	23856	31015	35594	37713	37487	35019
4	24941	32074	36627	38723	38473	35984
5	26025	33132	37660	39732	39459	36948
6	27109	34189	38693	40740	40445	37912
7	28193	35247	39725	41749	41431	38876
8	29277	36304	40757	42757	42416	39839
9	30361	37361	41789	43765	43401	40802
10	31444	38418	42821	44773	44386	41765
11	32527	39475	43852	45780	45371	42728
12	33609	40531	44884	46788	46355	43691
13	34692	41587	45915	47795	47339	44653
14	35774	42643	46945	48801	48323	45616
15	36855	43698	47976	49808	49307	46578
16	37937	44754	49006	50814	50291	47539
17	39018	45809	50036	51820	51274	48501
18	40099	46863	51066	52826	52257	49462
19	41180	47918	52095	53832	53240	50423
20	42261	48972	53125	54837	54223	51384
21	43341	50026	54154	55843	55205	52345
22	44421	51080	55182	56848	56187	53306
23	45500	52133	56211	57852	57169	54266
24	46580	53187	57239	58857	58151	55226
25	47659	54240	58267	59861	59133	56186
26	48738	55292	59295	60865	60114	57145
27	49816	56345	60322	61869	61095	58105
28	50895	57397	61350	62873	62076	59064
29	51973	58449	62377	63876	63057	60023
30	53050	59501	63404	64879	64037	60982
31	54128	60552	64430	65882	65018	61941
32	55205	61603	65457	66884	65998	62899
33	56282	62654	66483	67887	66977	63857

z	4000.	4100.	4200.	4300.	4400.	4500.
	3,5	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
34	057359	163705	267509	368889	467957	564815
35	58435	64755	68534	69891	68936	65773
36	59512	65805	69560	70893	69915	66730
37	60587	66855	70585	71894	70894	67688
38	61663	67905	71610	72895	71873	68645
39	62739	68954	72634	73897	72851	69602
40	63814	70003	73659	74897	73830	70559
41	64889	71052	74683	75898	74808	71515
42	65963	72101	75707	76898	75786	72471
43	67037	73149	76730	77898	76763	73427
44	68111	74197	77754	78898	77741	74383
45	69185	75245	78777	79898	78718	75339
46	70259	76293	79800	80897	79695	76294
47	71332	77340	80823	81896	80671	77250
48	72405	78387	81845	82895	81648	78205
49	73478	79434	82867	83894	82624	79159
50	74550	80481	83889	84893	83600	80114
51	75622	81527	84911	85891	84576	81068
52	76694	82573	85933	86889	85552	82023
53	77766	83619	86954	87887	86527	82977
54	78837	84665	87975	88884	87502	83930
55	79909	85710	88996	89882	88477	84884
56	80979	86755	90016	90879	89452	85837
57	82050	87800	91037	91876	90426	86790
58	83120	88845	92057	92872	91401	87743
59	84191	89889	93076	93869	92375	88696
60	85260	90933	94096	94865	93349	89648
61	86330	91977	95115	95861	94322	90601
62	87399	93021	96134	96857	95296	91553
63	88468	94064	97153	97852	96269	92505
64	89537	95107	98172	98847	97242	93456
65	90605	96150	99190	99842	98215	94408
66	91674	97193	300209	400837	99187	95359

z	4000.	4100.	4200.	4300.	4400.	4500.
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
67	092742	198235	301226	401832	500160	596310
68	93809	99277	02244	02826	01132	97261
69	94877	200319	03262	03820	02104	98212
70	95944	01361	04279	04814	03075	99162
71	97011	02402	05296	05808	04047	600112
72	98078	03443	06312	06802	05018	01062
73	99144	04484	07329	07795	05989	02012
74	100210	05524	08345	08788	06960	02962
75	01276	06565	09361	09781	07930	03911
76	02342	07605	10377	10773	08901	04860
77	03407	08645	11393	11765	09871	05809
78	04472	09684	12408	12758	10841	06758
79	05537	10724	13423	13749	11811	07706
80	06602	11763	14438	14741	12780	08655
81	07666	12802	15452	15733	13749	09603
82	08730	13840	16467	16724	14719	10551
83	09794	14879	17481	17715	15687	11499
84	10857	15917	18495	18705	16656	12446
85	11921	16955	19508	19696	17624	13393
86	12984	17992	20522	20686	18593	14341
87	14046	19030	21535	21676	19561	15287
88	15109	20067	22548	22666	20528	16234
89	16171	21104	23560	23656	21496	17181
90	17233	22140	24573	24645	22463	18127
91	18295	23177	25585	25634	23431	19073
92	19356	24213	26597	26623	24397	20019
93	20417	25249	27609	27612	25364	20964
94	21478	26284	28620	28601	26331	21910
95	22539	27320	29632	29589	27297	22855
96	23599	28355	30643	30577	28263	23800
97	24660	29390	31654	31565	29229	24745
98	25720	30424	32664	32552	30195	25690
99	26779	31459	33674	33540	31160	26634

z	4600.	4700.	4800.	4900.	5000.	5100.
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,7
0	627578	720979	812412	901961	989700	075702
1	28522	21903	13317	02847	90569	76553
2	29466	22826	14222	03733	91437	77405
3	30410	23750	15126	04619	92305	78256
4	31353	24673	16030	05505	93173	79107
5	32296	25596	16934	06390	94041	79957
6	33239	26519	17838	07275	94908	80808
7	34182	27442	18741	08161	95776	81659
8	35125	28365	19645	09046	96643	82509
9	36067	29287	20548	09930	97510	83359
10	37009	30209	21451	10815	98377	84209
11	37951	31131	22354	11699	99244	85059
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,7	3,7
12	38893	32053	23256	12584	000111	85908
13	39835	32974	24159	13468	00977	86758
14	40776	33896	25061	14352	01843	87607
15	41717	34817	25963	15235	02709	88456
16	42658	35738	26865	16119	03575	89305
17	43599	36659	27766	17002	04441	90154
18	44539	37579	28668	17885	05307	91003
19	45480	38500	29569	18768	06172	91851
20	46420	39420	30470	19651	07037	92700
21	47360	40340	31371	20534	07902	93548
22	48299	41260	32272	21416	08767	94396
23	49239	42179	33173	22298	09632	95244
24	50178	43099	34073	23180	10496	96091
25	51117	44018	34973	24062	11361	96939
26	52056	44937	35873	24944	12225	97786
27	52995	45856	36773	25826	13089	98633
28	53934	46775	37673	26707	13953	99480
29	54872	47693	38572	27588	14816	100327
30	55810	48611	39471	28469	15680	01174
31	56748	49529	40370	29350	16543	02020
32	57686	50447	41269	30231	17406	02866
33	58623	51365	42168	31111	18269	03713

z	4600.	4700.	4800.	4900.	5000.	5100.
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,7	3,7
34	659560	752283	843066	931991	019132	104559
35	60497	53200	43965	32872	19995	05404
36	61434	54117	44863	33752	20857	06250
37	62371	55034	45761	34631	21720	07096
38	63307	55951	46659	35511	22582	07941
39	64244	56867	47556	36390	23444	08786
40	65180	57783	48454	37269	24305	09631
41	66116	58700	49351	38148	25167	10476
42	67051	59615	50248	39027	26028	11321
43	67987	60531	51145	39906	26890	12165
44	68922	61447	52041	40785	27751	13010
45	69857	62362	52938	41663	28612	13854
46	70792	63277	53834	42541	29472	14698
47	71727	64192	54730	43419	30333	15542
48	72661	65107	55626	44297	31193	16385
49	73595	66022	56522	45175	32054	17229
50	74530	66936	57417	46052	32914	18072
51	75463	67850	58313	46929	33774	18915
52	76397	68764	59208	47806	34633	19759
53	77331	69678	60103	48683	35493	20601
54	78264	70592	60998	49560	36352	21444
55	79197	71505	61892	50437	37212	22287
56	80130	72418	62787	51313	38071	23129
57	81062	73332	63681	52189	38930	23971
58	81995	74244	64575	53065	39788	24813
59	82927	75157	65469	53941	40647	25655
60	83859	76070	66363	54817	41505	26497
61	84791	76982	67256	55692	42363	27339
62	85723	77894	68150	56568	43221	28180
63	86654	78806	69043	57443	44079	29021
64	87585	79718	69936	58318	44937	29862
65	88516	80629	70828	59193	45794	30703
66	89447	81540	71721	60067	46652	31544

z	4600.	4700.	4800.	4900.	5000.	5100.
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,7	3,7
67	690378	782452	872613	960942	047509	132385
68	91308	83362	73506	61816	48366	33225
69	92239	84273	74398	62690	49223	34065
70	93169	85184	75290	63564	50080	34905
71	94099	86094	76181	64438	50936	35745
72	95028	87004	77073	65311	51792	36585
73	95958	87914	77964	66185	52649	37425
74	96887	88824	78855	67058	53505	38264
75	97816	89734	79746	67931	54360	39104
76	98745	90643	80637	68804	55216	39943
77	99674	91552	81528	69676	56072	40782
78	700602	92461	82418	70549	56927	41620
79	01530	93370	83308	71421	57782	42459
80	02459	94279	84198	72293	58637	43298
81	03386	85187	95088	73165	59492	44136
82	04314	96096	85978	74037	60347	44974
83	05242	97004	86867	74909	61201	45812
84	06169	97912	87757	75780	62055	46650
85	07096	98819	88646	76652	62910	47488
86	08023	99727	89535	77523	63764	48325
87	08950	800634	90423	78394	64617	49162
88	09876	01541	91312	79264	65471	50000
89	10802	02448	92200	80135	66325	50837
90	11728	03355	93089	81005	67178	51674
91	12654	04262	93977	81876	68031	52510
92	13580	05168	94864	82746	68884	53347
93	14506	06074	95752	83616	69737	54183
94	15431	06980	96640	84485	70589	55019
95	16356	07886	97527	85355	71442	55856
96	17281	08792	98414	86224	72294	56691
97	18206	09697	99301	87093	73146	57527
98	19130	10602	900188	87963	73998	58363
99	20054	11507	01074	88831	74850	59198

z	5200.	5300.	5400.	5500.	5600.	5700.
	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7
0	160033	242759	323938	403627	481880	558749
1	60869	43578	24742	04416	82656	59510
2	61703	44397	25546	05206	83431	60272
3	62538	45216	26350	05995	84206	61034
4	63373	46035	27153	06784	84981	61795
5	64207	46854	27957	07573	85756	62556
6	65042	47672	28760	08362	86531	63318
7	65876	48491	29564	09151	87306	64079
8	66710	49309	30367	09939	88080	64840
9	67544	50127	31170	10728	88854	65600
10	68377	50945	31973	11516	89629	66361
11	69211	51763	32775	12304	90403	67122
12	70044	52581	33578	13092	91177	67882
13	70877	53398	34380	13880	91950	68642
14	71710	54216	35183	14668	92724	69402
15	72543	55033	35985	15455	93498	70162
16	73376	55850	36787	16243	94271	70922
17	74208	56667	37588	17030	95044	71682
18	75041	57483	38390	17817	95317	72442
19	75873	58300	39192	18604	96590	73201
20	76705	59116	39993	19391	97363	73960
21	77537	59933	40794	20177	98136	74719
22	78369	60749	41595	20964	98908	75479
23	79200	61565	42396	21750	99681	76237
24	80032	62380	43197	22537	500453	76996
25	80863	63196	43997	23323	01225	77755
26	81694	64012	44798	24109	01997	78513
27	82525	64827	45598	24895	02769	79272
28	83356	65642	46398	25680	03541	80030
29	84186	66457	47198	26466	04312	80788
30	85017	67272	47998	27251	05084	81546
31	85847	68087	48798	28037	05855	82304
32	86677	68901	49598	28822	06626	83062
33	87507	69716	50397	29607	07398	83819

z	5200.	5300.	5400.	5500.	5600.	5700.
	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7
34	188337	270530	351196	430392	508168	584577
35	89167	71344	51995	31176	08939	85334
36	89996	72158	52794	31961	09710	86091
37	90826	72972	53593	32745	10480	86848
38	91655	73786	54392	33530	11251	87605
39	92484	74599	55191	34314	12021	88362
40	93313	75413	55989	35098	12791	89119
41	94142	76226	56787	35882	13561	89875
42	94970	77039	57585	36665	14331	90632
43	95799	77852	58383	37449	15101	91388
44	96627	78664	59181	38232	15870	92144
45	97455	79477	59979	39016	16639	92900
46	98283	80290	60776	39799	17409	93656
47	99111	81102	61574	40582	18178	94412
48	99938	81914	62371	41365	18947	95168
49	200766	82726	63168	42147	19716	95923
50	01593	83538	63965	42930	20484	96678
51	02420	84359	64762	43712	21253	97434
52	03247	85161	65558	44495	22022	98189
53	04074	85972	66355	45277	22790	98944
54	04901	86784	67151	46059	23558	99699
55	05727	87595	67948	46841	24326	600453
56	06554	88406	68744	47622	25094	01208
57	07380	89216	69540	48404	25862	01962
58	08206	90027	70335	49185	26629	02717
59	09032	90838	71131	49967	27397	03471
60	09857	91648	71926	50748	28164	04225
61	10683	92458	72722	51529	28932	04979
62	11508	93268	73517	52310	29699	05733
63	12334	94078	74312	53091	30466	06486
64	13159	94888	75107	53871	31232	07240
65	13984	95697	75902	54652	31999	07993
66	14809	96507	76696	55432	32766	08746

z	5200.	5300.	5400.	5500.	5600.	5700.
	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7
67	215633	297316	377491	456212	533532	609500
68	16458	98125	78285	56992	34298	10253
69	17282	98934	79079	57772	35065	11005
70	18106	99743	79873	58552	35831	11758
71	18930	300551	80667	59332	36596	12511
72	19754	01360	81461	60111	37362	13263
73	20578	02168	82254	60890	38128	14016
74	21401	02977	83048	61670	38893	14768
75	22225	03785	83841	62449	39659	15520
76	23048	04593	84634	63228	40424	16272
77	23871	05400	85427	64006	41189	17024
78	24694	06208	86220	64785	41954	17775
79	25517	07015	87013	65564	42719	18527
80	26339	07823	87806	66342	43483	19278
81	27162	08630	88598	67120	44248	20030
82	27984	09437	89390	67898	45012	20781
83	28806	10244	90182	68676	45777	21532
84	29628	11051	90974	69454	46541	22283
85	30450	11857	91766	70232	47305	23034
86	31272	12663	92558	71009	48069	23784
87	32093	13470	93350	71787	48832	24535
88	32914	14276	94141	72564	49596	25285
89	33736	15082	94932	73341	50359	26035
90	34557	15888	95723	74118	51123	26786
91	35378	16693	96514	74895	51886	27536
92	36198	17499	97305	75672	52649	28286
93	37019	18304	98096	76448	53412	29035
94	37839	19109	98887	77225	54175	29785
95	38660	19914	99677	78001	54937	30534
96	39480	20719	400467	78777	55700	31284
97	40300	21524	01257	79553	56462	32033
98	41120	22329	02047	80329	57224	32782
99	41939	23133	02837	81105	57987	33531

z	5800.	5900.	6000.	6100.	6200.	6300.
	3,7	3,7	3.7	3,7	3,7	3,7
0	634280	708520	781513	853298	923917	993405
1	35029	09256	82230	54010	24617	94095
2	35777	09992	82960	54722	25318	94784
3	36526	10728	83683	55434	26018	95473
4	37274	11463	84407	56145	26718	96162
5	38022	12199	85130	56857	27418	96851
6	38770	12934	85853	57568	28118	97540
7	39518	13670	86576	58279	28817	98228
8	40266	14405	87299	58990	29517	98917
9	41014	15140	88022	59701	30217	99605
	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	3.8
10	41761	15875	88745	60412	30916	000294
11	42509	16610	89467	61123	31615	00982
12	43256	17344	90190	61833	32314	01670
13	44003	18079	90912	62544	33014	02358
14	44750	18813	91634	63254	33712	03046
15	45497	19547	92356	63965	34411	03734
16	46244	20282	93078	64675	35110	04421
17	46991	21016	93800	65385	35809	05109
18	47737	21750	94522	66095	36507	05796
19	48484	22483	95243	66805	37206	06484
20	49230	23217	95965	67514	37904	07171
21	49976	23951	96686	68224	38602	07858
22	50722	24684	97408	68933	39300	08545
23	51468	25417	98129	69643	39998	09232
24	52214	26150	98850	70352	40696	09919
25	52959	26884	99571	71061	41394	10605
26	53705	27616	800291	71770	42091	11292
27	54450	28349	01012	72479	42789	11978
28	55195	29082	01732	73188	43486	12665
29	55941	29815	02453	73896	44183	13351
30	56686	30547	03173	74605	44880	14037
31	57430	31279	03893	75313	45578	14723
32	58175	32011	04613	76021	46274	15409
33	58920	32743	05333	76730	46971	16095

z	5800.	5900.	6000.	6100.	6200.	6300.
	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	3,8
34	659664	733475	806053	877438	947668	016781
35	60409	34207	06773	78146	48365	17466
36	61153	34939	07492	78854	49061	18152
37	61897	35670	08212	79561	49757	18837
38	62641	36402	08931	80269	50454	19522
39	63385	37133	09650	80976	51150	20208
40	64128	37864	10369	81684	51846	20893
41	64872	38596	11088	82391	52542	21578
42	55616	39326	11807	83098	53238	22262
43	66359	40057	12526	83805	53933	22947
44	67102	40788	13245	84512	54629	23632
45	67845	41519	13963	85219	55324	24316
46	68588	42249	14681	85926	56020	25001
47	69331	42979	15400	86632	56715	25685
48	70074	43710	16118	87339	57410	26369
49	70816	44440	16836	88045	58105	27053
50	71559	45170	17554	88751	58800	27737
51	72301	45900	18272	89457	59495	28421
52	73043	46629	18989	90163	60190	29105
53	73785	47359	19707	90869	60884	29789
54	74527	48088	20424	91575	61579	30472
55	75269	48818	21141	92281	62273	31156
56	76011	49547	21859	92986	62967	31839
57	76752	50276	22576	93691	63662	32522
58	77494	51005	23293	94397	64356	33205
59	78235	51734	24010	95102	65050	33888
60	78976	52463	24726	95807	65743	34571
61	79717	53191	25443	96512	66437	35254
62	80458	53920	26159	97217	67131	35937
63	81199	54648	26876	97922	67824	36619
64	81940	55376	27592	98626	68517	37302
65	82680	56104	28308	99331	69211	37984
66	83421	56832	29024	900035	69904	38666

z	5800.	5900.	6000.	6100.	6200.	6300.
	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	3,8
67	684161	757560	829740	900739	970597	039348
68	84901	58288	30456	01444	71290	40031
69	85641	59016	31171	02148	71983	40712
70	86381	59743	31887	02852	72675	41391
71	87121	60471	32602	03555	73368	42076
72	87860	61198	33318	04259	74060	42758
73	88600	61925	34033	04963	74753	43439
74	89339	62652	34748	05666	75445	44121
75	90079	63379	35463	06370	76137	44802
76	90818	64106	36178	07073	76829	45483
77	91557	64833	36892	07776	77521	46164
78	92296	65559	37607	08479	78213	46845
79	93035	66286	38321	09182	78905	47526
80	93773	67012	39036	09885	79596	48207
81	94512	67738	39750	10587	80288	48887
82	95250	68464	40464	11290	80979	49568
83	95988	69190	41178	11992	81671	50248
84	96727	69916	41892	12695	82362	50929
85	97465	70642	42606	13397	83053	51609
86	98203	71367	43319	14099	83744	52289
87	98940	72093	44033	14801	84435	52969
88	99678	72818	44746	15503	85125	53649
89	700416	73543	45460	16205	85816	54329
90	01153	74268	46173	16906	86506	55009
91	01890	74993	46886	17608	87197	55688
92	02627	75718	47599	18309	87887	56368
93	03364	76443	48312	19011	88577	57047
94	04101	77167	49024	19712	89267	57726
95	04838	77892	49737	20413	89957	58405
96	05575	78616	50450	21114	90647	59085
97	06311	79340	51162	21815	91337	59764
98	07048	80065	51874	22516	92027	60442
99	07784	80789	52586	23216	92716	61121

z	6400.	6500.	6600.	6700.	6800.	6900.
	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
0	061800	129134	195439	260748	325089	388491
1	62478	29802	96097	61396	25728	89120
2	63157	30470	96755	62044	26366	89750
3	63835	31138	97413	62692	27005	90379
4	64513	31805	98071	63340	27643	91008
5	65191	32473	98728	63988	28281	91637
6	65869	33141	99386	64635	28919	92266
7	66547	33808	200043	65283	29558	92895
8	67225	34475	00700	65931	30195	93523
9	67903	35143	01358	66578	30833	94152
10	68580	35810	02015	67225	31471	94780
11	69258	36477	02672	67872	32109	95409
12	69935	37144	03328	68519	32746	96037
13	70612	37811	03985	69166	33384	96666
14	71290	38478	04642	69813	34021	97294
15	71967	39144	05298	70460	34659	97922
16	72644	39811	05955	71107	35296	98550
17	73320	40477	06611	71753	35933	99178
18	73997	41144	07268	72400	36570	99806
19	74674	41810	07924	73046	37207	400433
20	75350	42476	08580	73693	37844	01061
21	76027	43142	09236	74339	38480	01688
22	76703	43808	09892	74985	39117	02316
23	77379	44474	10548	75631	39754	02943
24	78055	45140	11203	76277	40390	03571
25	78731	45805	11859	76923	41027	04198
26	79407	46471	12514	77569	41663	04825
27	80083	47136	13170	78214	42299	05452
28	80759	47801	13825	78860	42935	06079
29	81434	48467	14480	79505	43571	06706
30	82110	49132	15135	80151	44207	07332
31	82785	49797	15790	80796	44843	07959
32	83460	50462	16445	81441	45479	08586
33	84136	51127	17100	82086	46114	09212

z	6400.	6500.	6600.	6700.	6800.	6900.
	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
34	084811	151791	217755	282731	346750	409838
35	85486	52456	18409	83376	47385	10465
36	86160	53120	19064	84021	48021	11091
37	86835	53785	19718	84665	48656	11717
38	87510	54449	20372	85310	49291	12343
39	88184	55113	21027	85955	49926	12969
40	88859	55777	21681	86599	50561	13595
41	89533	56441	22335	87243	51196	14220
42	90207	57105	22989	87887	51831	14846
43	90881	57769	23643	88532	52465	15472
44	91555	58433	24296	89176	53100	16097
45	92229	59097	24950	89820	53735	16723
46	92903	59760	25603	90463	54369	17348
47	93577	60423	26257	91107	55003	17973
48	94250	61087	26910	91751	55638	18598
49	94924	61750	27563	92394	56272	19223
50	95597	62413	28216	93038	56906	19848
51	96270	63076	28869	93681	57540	20473
52	96944	63739	29522	94324	58174	21098
53	97617	64402	30175	94967	58807	21722
54	98290	65064	30828	95611	59441	22347
55	98962	65727	31481	96254	60075	22971
56	99635	66389	32133	96896	60708	23596
57	100308	67052	32786	97539	61341	24220
58	00980	67714	33438	98182	61975	24844
59	01653	68376	34090	98824	62608	25468
60	02325	69038	34742	99467	63241	26092
61	02997	69700	35394	300109	63874	26716
62	03670	70362	36046	00752	64507	27340
63	04342	71024	36698	01394	65140	27964
64	05013	71686	37350	02036	65773	28588
65	05685	72347	38002	02678	66405	29211
66	06357	73009	38653	03320	67038	29835

z	6400.	6500.	6600.	6700.	6800.	6900.
	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
67	107029	173670	239305	303962	367670	430458
68	07700	74331	39956	04604	68303	31081
69	08372	74993	40607	05245	68935	31705
70	09043	75654	41258	05887	69567	32328
71	09714	76315	41909	06528	70199	32951
72	10385	76976	42560	07169	70832	33574
73	11056	77636	43211	07811	71463	34197
74	11727	78297	43862	08452	72095	34819
75	12398	78958	44513	09093	72727	35442
76	13068	79618	45163	09734	73359	36065
77	13739	80278	45814	10375	73990	36687
78	14409	80939	46464	11016	74622	37310
79	15080	81599	47114	11656	75253	37932
80	15750	82259	47765	12297	75884	38554
81	16420	82919	48415	12937	76516	39176
82	17090	83579	49065	13578	77147	39798
83	17760	84239	49715	14218	77778	40420
84	18430	84898	50364	14858	78409	41042
85	19100	85558	51014	15499	79039	41664
86	19769	86217	51664	16139	79670	42286
87	20439	86877	52313	16778	80301	42907
88	21108	87536	52963	17418	80931	43529
89	21778	88195	53612	18058	81562	44150
90	22447	88854	54261	18698	82192	44772
91	23116	89513	54910	19337	82822	45393
92	23785	90172	55559	19977	83453	46014
93	24454	90831	56208	20616	84083	46635
94	25123	91489	56857	21255	84713	47256
95	25792	92148	57506	21895	85343	47877
96	26460	92806	58154	22534	85973	48498
97	27129	93465	58803	23173	86602	49119
98	27797	94123	59451	23812	87232	49739
99	28465	94781	60100	24450	87861	50360

z	7000.	7100.	7200.	7300.	7400.	7500.
	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
0	450980	512583	573325	633229	692317	750613
1	51601	13195	73928	33823	92904	51192
2	52221	13807	74531	34418	93491	51771
3	52841	14418	75134	35013	94077	52349
4	53461	15030	75737	35608	94664	52928
5	54081	15641	76340	36202	95251	53507
6	54701	16252	76943	36797	95837	54086
7	55321	16863	77545	37391	96423	54664
8	55941	17474	78148	37985	97010	55243
9	56561	18085	78750	38580	97596	55821
10	57180	18696	79353	39174	98182	56399
11	57800	19307	79955	39768	98768	56978
12	58419	19917	80557	40362	99354	57556
13	59038	20528	81159	40956	99940	58134
14	59658	21139	81761	41550	700526	58712
15	60277	21749	82363	42143	01112	59290
16	60896	22359	82965	42737	01697	59868
17	61515	22970	83567	43331	02283	60446
18	62134	23580	84169	43924	02868	61023
19	62752	24190	84770	44517	03454	61601
20	63371	24800	85372	45111	04039	62178
21	63990	25410	85973	45704	04624	62756
22	64608	26020	86575	46297	05210	63333
23	65227	26629	87176	46890	05795	63911
24	65845	27239	87777	47483	06380	64488
25	66463	27849	88379	48076	06965	65065
26	67081	28458	88980	48669	07549	65642
27	67700	29068	89581	49262	08134	66219
28	68318	29677	90181	49855	08719	66796
29	68935	30286	90782	50447	09304	67373
30	69553	30895	91383	51040	09888	67950
31	70171	31504	91984	51632	10473	68526
32	70789	32113	92584	52225	11057	69103
33	71406	32722	93185	52817	11641	69680

z	7000.	7100.	7200.	7300.	7400.	7500.
	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
34	472024	533331	593785	653409	712226	770256
35	72641	33940	94385	54001	12810	70833
36	73258	34548	94986	54593	13394	71409
37	73876	35157	95586	55185	13978	71985
38	74493	35765	96186	55777	14562	72561
39	75110	36374	96786	56369	15146	73137
40	75727	36982	97386	56961	15729	73713
41	76343	37590	97985	57552	16313	74289
42	76960	38198	98585	58144	16897	74865
43	77577	38807	99185	58735	17480	75441
44	78193	39414	99784	59327	18064	76017
45	78810	40022	600384	59918	18647	76592
46	79426	40630	00983	60509	19230	77168
47	80043	41238	01583	61100	19814	77743
48	80659	41845	02182	61691	20397	78319
49	81275	42453	02781	62282	20980	78894
50	81891	43060	03380	62873	21563	79470
51	82507	43668	03979	63464	22146	80045
52	83123	44275	04578	64055	22728	80620
53	83739	44882	05177	64646	23311	81195
54	84355	45489	05776	65236	23894	81770
55	84970	46096	06374	65827	24476	82345
56	85586	46703	06973	66417	25059	82919
57	86201	47310	07571	67008	25641	83494
58	86817	47917	08170	67598	26224	84069
59	87432	48524	08768	68188	26806	84643
60	88047	49130	09366	68778	27388	85218
61	88662	49737	09964	69368	27970	85792
62	89277	50343	10562	69958	28552	86367
63	89892	50950	11160	70548	29134	86941
64	90507	51556	11758	71138	29716	87515
65	91122	52162	12356	71728	30298	88089
66	91736	52768	12954	72317	30880	88663

z	7000.	7100.	7200.	7300.	7400.	7500.
	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
67	492351	553374	613552	672907	731461	789237
68	92965	53980	14149	73496	32043	89811
69	93580	54586	14747	74086	32625	90385
70	94194	55192	15344	74675	33206	90959
71	94808	55797	15941	75264	33787	91532
72	95423	56403	16539	75853	34369	92106
73	96037	57008	17136	76442	34950	92680
74	96651	57614	17733	77031	35531	93253
75	97264	58219	18330	77620	36112	93826
76	97878	58824	18927	78209	36693	94400
77	98492	59429	19524	78798	37274	94973
78	99106	60035	20121	79387	37855	95546
79	99719	60640	20717	79975	38435	96119
80	500333	61244	21314	80564	39016	96692
81	00946	61849	21910	81152	39597	97265
82	01559	62454	22507	81740	40177	97838
83	02172	63059	23103	82329	40757	98411
84	02786	63663	23699	82917	41338	98983
85	03399	64268	24296	83505	41918	99556
86	04011	64872	24892	84093	42498	800128
87	04624	65476	25488	84681	43078	00701
88	05237	66081	26084	85269	43658	01273
89	05850	66685	26680	85857	44238	01846
90	06462	67289	27275	86444	44818	02418
91	07075	67893	27871	87032	45398	02990
92	07687	68497	28467	87620	45978	03562
93	08300	69101	29062	88207	46557	04134
94	08912	69704	29658	88794	47137	04706
95	09524	70308	30253	89382	47716	05278
96	10136	70912	30848	89969	48296	05850
97	10748	71515	31443	90556	48875	06421
98	11360	72118	32039	91143	49454	06993
99	11972	72722	32634	91730	50034	07564

z	7600.	7700.	7800.	7900.	8000.	8100.
	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
0	808136	864907	920946	976271	030900	084850
1	08707	65471	21503	76821	31443	85386
2	09279	66035	22059	77370	31985	85922
3	09850	66599	22616	77920	32528	86458
4	10421	67163	23173	78469	33071	86994
5	10992	67726	23729	79019	33613	87530
6	11563	68290	24285	79568	34156	88066
7	12134	68854	24842	80117	34698	88602
8	12705	69417	25398	80667	35241	89137
9	13276	69980	25954	81216	35783	89673
10	13847	70544	26510	81765	36325	90209
11	14417	71107	27066	82314	36867	90744
12	14988	71670	27622	82863	37409	91279
13	15558	72233	28178	83412	37951	91815
14	16129	72796	28734	83960	38493	92350
15	16699	73359	29290	84509	39035	92885
16	17269	73922	29846	85058	39577	93420
17	17840	74485	30401	85606	40119	93955
18	18410	75048	30957	86155	40661	94490
19	18980	75610	31512	86703	41202	95025
20	19550	76173	32068	87252	41744	95560
21	20120	76736	32623	87800	42285	96095
22	20689	77298	33178	88348	42827	96630
23	21259	77860	33733	88897	43368	97165
24	21829	78423	34288	89445	43909	97699
25	22398	78985	34843	89993	44450	98234
26	22968	79547	35398	90541	44992	98768
27	23537	80109	35953	91089	45533	99303
28	24107	80671	36508	91636	46074	99837
29	24676	81233	37063	92184	46615	100371
30	25245	81795	37618	92732	47155	00905
31	25815	82357	38172	93279	47696	01440
32	26384	82918	38727	93827	48237	01974
33	26953	83480	39281	94375	48778	02508

z	7600.	7700.	7800.	7900.	8000.	8100.
	3,8	3,8	3,8	3,8	8,9	3,9
34	827522	884042	939836	994922	049318	103042
35	28090	84603	40390	95469	49859	03576
36	28659	85165	40944	96017	50399	04109
37	29228	85726	41498	96564	50940	04643
38	29797	86287	42053	97111	51480	05177
39	30365	86848	42607	97658	52020	05710
40	30934	87410	43161	98205	52560	06244
41	31502	87971	43715	98752	53101	06778
42	32070	88532	44268	99299	53641	07311
43	32639	89093	44822	99846	54181	07844
	3,8	3,8	3,8	3,9	3,9	3,9
44	33207	89653	45376	000392	54721	08378
45	33775	90214	45929	00939	55260	08911
46	34343	90775	46483	01480	55800	09444
47	34911	91336	47037	02032	56340	09977
48	35479	91896	47590	02579	56880	10510
49	36047	92457	48143	03125	57419	11043
50	36614	93017	48697	03671	57959	11576
51	37182	93577	49250	04218	58498	12109
52	37750	94138	49803	04764	59038	12642
53	38317	94698	50356	05310	59577	13174
54	38885	95258	50909	05856	60116	13707
55	39452	95818	51462	06402	60655	14240
56	40019	96378	52015	06948	61195	14772
57	40586	96938	52568	07494	61734	15305
58	41154	97498	53120	08039	62273	15837
59	41721	98058	53673	08585	62812	16369
60	42288	98617	54225	09131	63350	16902
61	42855	99177	54778	09676	63889	17434
62	43421	99736	55330	10222	64428	17966
63	43988	900296	55883	10767	64967	18498
64	44555	00855	56435	11313	65505	19030
65	45122	01415	56987	11858	66044	19562
66	45688	01974	57539	12403	66582	20094

z	7600.	7700.	7800.	7900.	8000.	8100.
	3,8	3,8	3,8	3,9	3,9	3,9
67	846255	902533	958092	012948	067121	120626
68	46821	03092	58644	13493	67659	21157
69	47387	03651	59195	14038	68197	21689
70	47954	04210	59747	14583	68735	22221
71	48520	04769	60299	15128	69273	22752
72	49086	05328	60851	15673	69812	23284
73	49652	05887	61403	16218	70350	23815
74	50218	06445	61954	16762	70887	24346
75	50784	07004	62506	17307	71425	24878
76	51350	07563	63057	17851	71963	25409
77	51915	08121	63608	18396	72501	25940
78	52481	08679	64160	18940	73038	26471
79	53047	09238	64711	19485	73576	27002
80	53612	09796	65262	20029	74114	27533
81	54178	10354	65813	20573	74651	28064
82	54743	10912	66364	21117	75188	28595
83	55308	11470	66915	21661	75726	29126
84	55874	12028	67466	22205	76263	29656
85	56439	12586	68017	22749	76800	30187
86	57004	13144	68568	23293	77337	30717
87	57569	13702	69118	23837	77874	31248
88	58134	14259	69669	24381	78411	31778
89	58699	14817	70220	24924	78948	32309
90	59263	15375	70770	25468	79485	32839
91	59828	15932	71320	26011	80022	33369
92	60393	16489	71871	26555	80559	33899
93	60957	17047	72421	27098	81095	34430
94	61522	17604	72971	27641	81632	34960
95	62086	18161	73521	28185	82169	35490
96	62651	18718	74071	28728	82705	36019
97	63215	19275	74621	29271	83241	36549
98	63779	19832	75171	29814	83778	37079
99	64343	20389	75721	30357	84314	37609

z	8200.	8300.	8400.	8500.	8600.	8700.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
0	138139	190781	242793	294189	344985	395193
1	38668	91304	43310	94700	45489	95692
2	39198	91827	43827	95211	45994	96191
3	39727	92350	44344	95722	46499	96690
4	40257	92873	44860	96233	47004	97189
5	40786	93396	45377	96743	47509	97688
6	41315	93919	45894	97254	48013	98187
7	41844	94442	46410	97764	48518	98685
8	42373	94965	46927	98275	49023	99184
9	42903	95488	47444	98785	49527	99683
10	43432	96010	47960	99296	50032	400182
11	43961	96533	48476	99806	50536	00680
12	44489	97055	48993	300316	51040	01179
13	45018	97578	49509	00826	51544	01677
14	45547	98100	50025	01336	52049	02176
15	46076	98623	50541	01847	52553	02674
16	46604	99145	51057	02357	53057	03172
17	47133	99667	51573	02866	53561	03670
18	47661	200189	52089	03376	54065	04169
19	48190	00711	52605	03886	54569	04667
20	48718	01233	53121	04396	55073	05165
21	49246	01755	53637	04906	55576	05663
22	49775	02277	54152	05415	56080	06161
23	50303	02799	54668	05925	56584	06659
24	50831	03321	55184	06434	97087	07157
25	51359	03842	55699	06944	57591	07654
26	51887	04364	56215	07453	58095	08152
27	52415	04886	56730	07963	58598	08650
28	52943	05407	57245	08472	59101	09147
29	53471	05929	57761	08981	59605	09645
30	53998	06450	58276	09490	60108	10142
31	54526	06971	58791	09999	60611	10640
32	55054	07493	59306	10508	61114	11137
33	55581	08014	59821	11017	61617	11635

z	8200.	8300.	8400.	8500.	8600.	8755.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
34	156109	208535	260336	311526	362120	412132
35	56636	09056	60851	12035	62623	12629
36	57163	09577	61366	12544	63126	13126
37	57691	10098	61880	13053	63629	13623
38	58218	10619	62395	13562	64132	14120
39	58745	11140	62910	14070	64635	14617
40	59272	11661	63424	14579	65137	15114
41	59799	12181	63939	15087	65640	15611
42	60326	12702	64453	15596	66143	16108
43	60853	13222	64968	16104	66645	16605
44	61380	13743	65482	16612	67148	17101
45	61907	14263	65997	17121	67650	17598
46	62433	14784	66511	17629	68152	18095
47	62960	15304	67025	18137	68655	18591
48	63487	15824	67539	18645	69157	19088
49	64013	16345	68053	19153	69659	19584
50	64539	16865	68567	19661	70161	20081
51	65066	17385	69081	20169	70663	20577
52	65592	17905	69595	20677	71165	21073
53	66118	18425	70109	21185	71667	21569
54	66645	18945	70622	21692	72169	22065
55	67171	19465	71136	22200	72671	22561
56	67697	19984	71650	22708	73172	23058
57	68223	20504	72163	23215	73674	23553
58	68749	21024	72677	23723	74176	24049
59	69275	21543	73190	24230	74677	24545
60	69800	22063	73704	24738	75179	25041
61	70326	22582	74217	25245	75680	25537
62	70852	23102	74730	25752	76182	26032
63	71378	23621	75243	26259	76683	26528
64	71903	24140	75757	26767	77184	27024
65	72429	24659	76270	27274	77686	27519
66	72954	25179	76783	27781	78187	28015

z	8200.	8300.	8400.	8500.	8600.	8700.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
67	173479	225698	277296	328288	378688	428510
68	74005	26217	77808	28795	79189	29005
69	74530	26736	78321	29301	79690	29501
70	75055	27255	78834	29808	80191	29996
71	75580	27773	79347	30315	80692	30491
72	76105	28292	79859	30822	81193	30986
73	76630	28811	80372	31328	81693	31481
74	77155	29330	80885	31835	82194	31976
75	77680	29848	81397	32341	82695	32471
76	78205	30367	81909	32848	83195	32966
77	78730	30885	82422	33354	83696	33461
78	79254	31404	82934	33860	84196	33956
79	79779	31922	83446	34367	84697	34450
80	80303	32440	83959	34873	85197	34945
81	80828	32958	84471	35379	85698	35440
82	81352	33477	84983	35885	86198	35934
83	81877	33995	85495	36391	86698	36429
84	82401	34513	86007	36897	87198	36923
85	82925	35031	86518	37403	87698	37418
86	83449	35549	87030	37909	88198	37912
87	83973	36066	87542	38415	88698	38406
88	84497	36584	88054	38920	89198	38900
89	85021	37102	88565	39426	89698	39395
90	85545	37620	89077	39932	90198	39889
91	86069	38137	89588	40437	90697	40383
92	86593	38655	90100	40943	91197	40877
93	87117	39172	90611	41448	91697	41371
94	87640	39690	91123	41953	92196	41865
95	88164	40207	91634	42459	92696	42358
96	88687	40724	92145	42964	93195	42852
97	89211	41242	92656	43469	93695	43346
98	89734	41759	93167	43974	94194	43840
99	90258	42276	93678	44479	94693	44333

z	8800.	8900.	9000.	9100.	9200.	9300.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
0	444827	493900	542425	590414	637878	684829
1	45320	94388	42908	90891	38350	85296
2	45814	94876	43390	91368	38822	85763
3	46307	95364	43873	91845	39294	86230
4	46800	95852	44355	92322	39766	86697
5	47294	96339	44837	92800	40238	87164
6	47787	96827	45319	93276	40710	87630
7	48280	97315	45802	93753	41181	88097
8	48773	97802	46284	94230	41653	88564
9	49266	98290	46766	94707	42125	89030
10	49759	98777	47248	95184	42596	89497
11	50252	99264	47730	95660	43068	89963
12	50745	99752	48212	96137	43539	90430
13	51238	500239	48694	96614	44011	90896
14	51730	00726	49176	97090	44482	91362
15	52223	01213	49657	97567	44953	91829
16	52716	01701	50139	98043	45425	92295
17	53208	02188	50621	98520	45896	92761
18	53701	02675	51102	98996	46367	93227
19	54193	03162	51584	99472	46838	93693
20	54686	03649	52065	99948	47309	94159
21	55178	04135	52547	600425	47780	94625
22	55671	04622	53028	00901	48251	95091
23	56163	05109	53510	01377	48722	95557
24	56655	05596	53991	01853	49193	96023
25	57147	06082	54472	02329	49664	96488
26	57639	06569	54953	02805	50135	96954
27	58131	07055	55434	03281	50605	97420
28	58623	07542	55916	03756	51076	97885
29	59115	08028	56397	04232	51546	98351
30	59607	08515	56878	04708	52017	98816
31	60099	09001	57358	05183	52488	99282
32	60591	09487	57839	05659	52958	99747
33	61082	09973	58320	06135	53428	700213

z	8800.	8900.	9000.	9100.	9200.	9300.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
34	461574	510459	558801	606610	653899	700678
35	62066	10946	59282	07086	54369	01143
36	62557	11432	59762	07561	54839	01608
37	63049	11918	60243	08036	55309	02074
38	63540	12404	60723	08512	55780	02539
39	64031	12889	61204	08987	56250	03004
40	64523	13375	61684	09462	56720	03469
41	65014	13861	62165	09937	57190	03934
42	65505	14347	62645	10412	57660	04399
43	65996	14832	63125	10887	58130	04863
44	66487	15318	63606	11362	58599	05328
45	66978	15803	64086	11837	59069	05793
46	67469	16289	64566	12312	59539	06258
47	67960	16774	65046	12787	60009	06722
48	68451	17260	65526	13262	60478	07187
49	68942	17745	66006	13736	60948	07652
50	69433	18230	66486	14211	61417	08116
51	69923	18716	66966	14686	61887	08581
52	70414	19201	67445	15160	62356	09045
53	70905	19686	67925	15635	62826	09509
54	71395	20171	68405	16109	63295	09974
55	71886	20656	68885	16583	63764	10438
56	72376	21141	69364	17058	64233	10902
57	72866	21626	69844	17532	64703	11366
58	73357	22111	70323	18006	65172	11830
59	73847	22595	70803	18481	65641	12294
60	74337	23080	71282	18955	66110	12758
61	74827	23565	71761	19429	66579	13222
62	75317	24049	72241	19903	67048	13686
63	75807	24534	72720	20377	67517	14150
64	76297	25018	73199	20851	67985	14614
65	76787	25503	73678	21325	68454	15078
66	77277	25987	74157	21799	68923	15542

z	8800.	8900.	9000.	9100.	9200.	9300.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
67	477707	526472	574636	622272	669392	716005
68	78257	26956	75115	22746	69860	16469
69	78747	27440	75594	23220	70329	16932
70	79236	27924	76073	23693	70797	17396
71	79726	28409	76552	24167	71266	17859
72	80215	28893	77030	24640	71734	18323
73	80705	29377	77509	25114	72203	18786
74	81194	29861	77988	25587	72671	19249
75	81584	30345	78466	26061	73139	19713
76	82173	30828	78945	26534	73607	20176
77	82662	31312	79423	27007	74076	20639
78	83151	31796	79902	27481	74544	21102
79	83641	32280	80380	27954	75012	21565
80	84130	32763	80858	28427	75480	22028
81	84619	33247	81337	28900	75948	22491
82	85108	33731	81815	29373	76416	22954
83	85597	34214	82293	29846	76884	23417
84	86085	34697	82771	30319	77351	23880
85	86574	35181	83249	30792	77819	24343
86	87063	35664	83727	31264	78287	24805
87	87552	36147	84205	31737	78754	25268
88	88040	36631	84683	32210	79222	25731
89	88529	37114	85161	32683	79690	26193
90	89018	37597	85639	33155	80157	26656
91	89506	38080	86117	33628	80625	27118
92	89995	38563	86594	34100	81092	27581
93	90483	39046	87072	34573	81559	28043
94	90971	39529	87549	35045	82027	28506
95	91460	40012	88027	35517	82494	28968
96	91948	40494	88505	35990	82961	29430
97	92436	40977	88982	36462	83428	29892
98	92924	41460	89459	36934	83895	30354
99	93412	41943	89937	37406	84362	30816

z	9400.	9500.	9600.	9700.	9800.	9900.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
0	731279	777236	822712	867717	912261	956352
1	31741	77693	23165	68165	12704	56791
2	32202	78150	23617	68613	13147	57229
3	32664	78607	24069	69060	13590	57668
4	33126	79064	24522	69508	14033	58106
5	33588	79521	24974	69955	14476	58545
6	34050	79978	25426	70403	14919	58983
7	34511	80435	25878	70850	15362	59422
8	34973	80892	26330	71298	15805	59860
9	35435	81348	26782	71745	16247	60298
10	35896	81805	27234	72192	16690	60737
11	36358	82262	27686	72640	17133	61175
12	36819	82718	28138	73087	17575	61613
13	37281	83175	28589	73534	18018	62051
14	37742	83631	29041	73981	18461	62489
15	38203	84088	29493	74428	18903	62927
16	38664	84544	29945	74875	19345	63365
17	39126	85001	30396	75322	19788	63803
18	39587	85457	30848	75769	20230	64241
19	40048	85913	31299	76216	20673	64679
20	40509	86369	31751	76663	21115	65117
21	40970	86826	32202	77109	21557	65554
22	41431	87282	32654	77556	21999	65992
23	41892	87738	33105	78003	22441	66430
24	42353	88194	33556	78459	22884	66868
25	42814	88650	34007	78896	23326	67305
26	43274	89106	34459	79343	23768	67743
27	43735	89562	34910	79789	24210	68180
28	44196	90017	35361	80236	24651	68618
29	44656	90473	35812	80682	25093	69055
30	45117	90929	36263	81128	25535	69492
31	45577	91385	36714	81575	25977	69930
32	46038	91840	37165	82021	26419	70367
33	46498	92296	37616	82467	26860	70804

z	9400.	9500.	9600.	9700.	9800.	9900.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
34	746959	792751	838066	882913	927302	971242
35	47419	93207	38517	83360	27744	71679
36	47879	93662	38968	83806	28185	72116
37	48340	94118	39419	84252	28627	72553
38	48800	94573	39869	84698	29068	72990
39	49260	95028	40320	85144	29510	73427
40	49720	95484	40770	85590	29951	73864
41	50180	95939	41221	86035	30392	74301
42	50640	96394	41671	86481	30834	74738
43	51100	96849	42122	86927	31275	75174
44	51560	97304	42572	87373	31716	75611
45	52020	97759	43022	87818	32157	76048
46	52479	98214	43473	88264	32598	76485
47	52939	98669	43923	88710	33039	76921
48	53399	99124	44373	89155	33480	77358
49	53858	99579	44823	89601	33921	77794
50	54318	800034	45273	90046	34362	78231
51	54778	00488	45723	90492	34803	78667
52	55237	00943	46173	90937	35244	79104
53	55697	01398	46623	91382	35685	79540
54	56156	01852	47073	91828	36126	79776
55	56615	02307	47523	92273	36566	80413
56	57075	02761	47973	92718	37007	80849
57	57534	03216	48422	93163	37448	81285
58	57993	03670	48872	93608	37888	81721
59	58452	04125	49322	94053	38329	82157
60	58911	04579	49771	94498	38769	82593
61	59370	05033	50221	94943	39210	83029
62	59829	05487	50670	95388	39650	83465
63	60288	05942	51120	95833	40090	83901
64	60747	06396	51569	96278	40531	84337
65	61206	06850	52019	96722	40971	84773
66	61665	07304	52468	97167	41411	85209

z	9400.	9500.	9600.	9700.	9800.	9900.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
67	762124	807758	852917	897612	941851	985645
68	62582	08212	53366	98057	42291	86080
69	63041	08666	53816	98501	42731	86516
70	63500	09119	54265	98946	43172	86952
71	63958	09573	54714	99390	43612	87387
72	64417	10027	55163	99835	44051	87823
73	64875	10481	55612	900279	44491	88258
74	65334	10934	56061	00723	44931	88694
75	65792	11388	56510	01168	45371	89129
76	66251	11841	56959	01612	45811	89564
77	66709	12295	57407	02056	46251	90000
78	67167	12748	57856	02500	46690	90435
79	67625	13202	58305	02944	47130	90870
80	68083	13655	58754	03389	47569	91305
81	68541	14108	59202	03833	48009	91741
82	69000	14562	59651	04277	48448	92176
83	69458	15015	60099	04721	48888	92611
84	69915	15468	60548	05164	49327	93046
85	70373	15921	60996	05608	49767	93481
86	70831	16374	61445	06052	50206	93916
87	71289	16827	61893	06496	50645	94350
88	71747	17280	62341	06940	51085	94785
89	72204	17733	62790	07383	51524	95220
90	72662	18186	63238	07827	51963	95655
91	73120	18639	63686	08271	52402	96090
92	73577	19092	64134	08714	52841	96524
93	74035	19544	64582	09158	53280	96959
94	74492	19997	65030	09601	53719	97393
95	74950	20450	65478	10044	54158	97828
96	75407	20902	65926	10488	54597	98262
97	75864	21355	66374	10931	55036	98697
98	76322	21807	66822	11374	55474	99131
99	76779	22260	67270	11818	55913	99566

Mainz,
gedruckt bei Florian Kupferberg.

Verzeichniß

der

neuen Verlagsbücher

von

Florian Kupferberg in Mainz, für 1824,

welche

in allen Buchhandlungen zu haben sind.

Curiositäten-Almanach, allgemeiner unterhaltender, auf alle Tage im Jahr. Herausg. von Chr. A. Fischer. 1r Jahrgang 1825. 1 rtl. 12 ggr. od. 2 fl. 42 kr.

Fabricius, Dr. F. G. A., medicinisch-gerichtlicher Fall der Tödlichkeit einer penetrirenden Bauchwunde mit Vorfall und Verletzung ꝛc. 8. 4 ggr. od. 15 kr.

Gratz, Dr., der Apologet des Katholizismus. Eine Zeitschrift zur Berichtigung mannigfaltiger Entstellungen desselben. Achtes und neuntes Heft. gr. 8. 1 rtl. od. 1 fl. 36 kr.

Hepp, P. D., Lichenen-Flora von Würzburg, oder Aufzählung und Beschreibung der um Würzburg wachsenden Flechten. Mit einer neuen Zusammenstellung der Gattungen und einer Erläuterung der Gattungsmerkmale begleitet. Mit 1 Steintafel. 8. 10 ggr. od. 45 kr.

Horst, G. C., Flora oder die Blumen in ihrer höheren Bedeutung. Ein Weihnachtsgeschenk für Jünglinge und Jungfrauen, 8. 14 ggr. od. 1 fl.

Lehne, F., einige Bemerkungen über das Unternehmen der gelehrten Gesellschaft zu Harlem, ihrer Stadt die Ehre der Erfindung der Buchdruckerkunst zu ertrotzen. Nebst einem Nachtrage, ver-

anlaßt durch eine sogenannte Recension in der Hallischen Litteratur-Zeitung. Zweite Ausgabe. 8. 5 ggr. oder 20 kr.

Muhl, S., der Volksunterricht in seiner Nothwendigkeit, so wie in seiner Einwirkung auf die Gesammtbildung d. Menschen. Mit 1 Steintaf. gr. 8. 1 rtl. od. 1 fl. 48 kr.

Rauschnick, Dr., Königskerzen. Eine Sammlung romantischer und abentheuerlicher Erzählungen. 2 Theile, wohlf. Ausgabe. 8. 1 rtl. 12 ggr. od. 2 fl. 42 kr.

Rosenwall, P., malerische Ansichten und Bemerkungen auf einer Reise durch Holland, die Rheinlande, Baden, die Schweiz und Würtemberg. 2 Theile, wohlfeile Ausgabe. 8. 1 rtl. 8 ggr. od. 2 fl. 24 kr.

Starklof, Ludw., der verlorne Sohn. Ein Roman, 2 Thle. 8. 2 rtl. 6 ggr. od. 4 fl.

Stein, J. P. W., geographische Trigonometrie, oder die Auflösung der geradlinigen, sphärischen und sphäroidischen Dreiecke, mit ihrer Anwendung bei größern geodätischen Vermessungen und der Projection der Charten, sowohl theoretisch als auch rein praktisch dargestellt und mit einem Anhange über Winkelmeßinstrumente begleitet. Mit 8 Steintaf. gr. 4. 3 rtl. 16 ggr. od. 6 fl. 36 kr.

Steininger, J., Bemerkungen über die Eifel und Auvergne. gr. 8. 6 ggr. od. 27 kr.

Umpfenbach, Dr. H., die Lehre von dem Gleichgewichte und der Bewegung fester und flüssiger Körper, mit 6 Steintaf. gr. 8. 2 rtl. od. 3 fl. 36 kr.

Wetzler, J. C., über Gesundbrunnen und Heilbäder, 3r Th. 8.

Auch unter dem Titel:

— — über Gesundbrunnen und Heilbäder insbesondere, oder Nachrichten über die vorzüglichsten Gesundbrunnen und Heilbäder in Böhmen. 8. 1 rtl. 20 ggr. od. 3 fl. 18 kr.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Johann Josef Ignaz <<von>>,

Der mathematische Jugendfreund oder populäre Darstellung der Grundlehren der reinen und angewandten Mathematik für Anfänger

Bd.: 1

Mainz 1825

Math.u. 72 r-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10593933-6